

1.

図1のように xy 平面に広がる水面が、 x 軸を境界として水深が異なる2つの領域に分かれている。領域 A ($y > 0$) における波の速さを V 、領域 B ($y < 0$) における波の速さを $\frac{V}{2}$ とする。簡単のため、波の反射と屈折は境界で起こり、反射する際に波の位相は変化しないと仮定して、次の問いに答えよ。

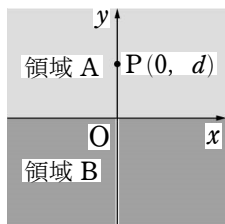


図1

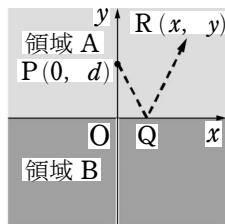


図2

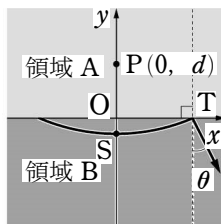


図3

[A] 図1のように、領域 A の座標 $(0, d)$ の点 P に波源を置く。波源は一定の周期で振動し、まわりの水面に同心円状の波を広げる。

(1) 領域 A におけるこの波の波長を $\frac{d}{2}$ とする。その波の振動数を、 V, d を用いて表せ。また、同じ波源が領域 B にある場合、そこから出る波の波長を求めよ。

(2) 波長に比べて水深が十分に小さい場合、波の速さ v は重力加速度の大きさ g と水深 h を用いて $v = g^a h^b$ と表される。ここで a, b は定数である。両辺の単位を比較することにより a, b を求めよ。これを用いて領域 A の水深は領域 B の水深の何倍か求めよ。

(3) 図2のように、波源 P から出た波が境界上の点 Q で反射した後、座標 (x, y) の点 R に伝わる場合を考える。点 Q の位置は反射の法則により定まる。このとき、距離 $PQ + QR$ を、 x, y, d を用いて表せ。

(4) 直線 $y = d$ 上の座標 (x, d) の点で、波源から直接伝わる波と境界からの反射波が弱めあう条件を、 x, d と整数 n を用いて表せ。また、そのような点は直線 $y = d$ 上に何個あるか。

(5) 領域 B において波源と同じ位相をもつ波面のうち、原点 O から見て最も内側のものを考える。図3のように、その波面と x 軸 ($x > 0$) との交点を T、 y 軸との交点を S とし、点 T における屈折角を θ とする。点 S, T の座標と $\sin \theta$ を求めよ。

[B] [A] と同じ振動数の波源が一定の速さで動いている場合について、次の問いに答えよ。

(1) 波源が領域 A の y 軸上を正の向きに速さ u ($u < \frac{V}{2}$) で動いている場合を考える。

波源の位置で観測される反射波の振動数を、 V, u, d を用いて表せ。また、領域 B の y 軸上を負の向きに一定の速さ w ($w < \frac{V}{2}$) で動く点で観測される波の振動数を、 V, u, w, d を用いて表せ。

(2) 次に、波源が領域 A の直線 $y = d$ 上を右向きに速さ u ($u < \frac{V}{2}$) で動いている場合を考える。波源から出た波が境界で反射して波源にもどるまでの時間を、 V, u, d を用いて表せ。

(3) [B](2) の設定で、波源における波と境界で反射して波源にもどった波が逆位相になる条件を、 u, V と整数 m を用いて表せ。さらに、この条件を満たす u をすべて求めよ。

[解答] [A] (1) 振動数: $\frac{2V}{d}$, 波長: $\frac{d}{4}$ (2) $a: \frac{1}{2}, b: \frac{1}{2}$, 水深: 4 倍

(3) $\sqrt{x^2 + (y+d)^2}$ (4) 条件: $\sqrt{x^2 + (2d)^2} - |x| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{d}{2}$, 個数: 8 個

(5) $S\left(0, -\frac{d}{4}\right), T\left(\frac{\sqrt{5}}{2}d, 0\right), \sin \theta: \frac{\sqrt{5}}{6}$

[B] (1) 反射波: $\frac{V-u}{V+u} \cdot \frac{2V}{d}$, 観測される波: $\frac{V-2w}{V+u} \cdot \frac{2V}{d}$ (2) $\frac{2d}{\sqrt{V^2 - u^2}}$

(3) 条件: $\frac{4V}{\sqrt{V^2 - u^2}} = m + \frac{1}{2}$, 条件を満たす $u: \frac{\sqrt{17}}{9}V$

[解説]

[ヒント] [A](3) 反射波は、波源の境界について線対称である点(仮想波源)から出ているように観測される。

(4) PO 間の定常波の節から出た節線と直線 $y = d$ の交点が、求める弱めあう点になる。

(5) 波の同位相の位置は、波長の整数倍 ($m\lambda$) だけ波源 P からの距離の異なる位置である。

[B](1) ドップラー効果の式を用いる。速度 $v_{\text{音源}}, v_{\text{観測者}}$ の正の向きは、S(音源)から O(観測者)へ向かう向きである。

(3) 波が同位相であるのは、時間差が周期の整数倍 (mT) を満たすときである。

[A](1) 領域 A では、波の速さ $v_A = V$ 、波長

$\lambda_A = \frac{d}{2}$ なので、求める振動数を f とすると、

波の基本式「 $v = f\lambda$ 」より $V = f \cdot \frac{d}{2}$

よって $f = \frac{2V}{d}$

領域 B において波の速さは $v_B = \frac{V}{2}$ なので、

求める波長を λ_B とすると

$\frac{V}{2} = f\lambda_B = \frac{2V}{d}\lambda_B$ よって $\lambda_B = \frac{d}{4}$

(2) v , g , h の単位はそれぞれ v [m/s],

g [m/s²], h [m] である。

$v = g^a h^b$ の両辺の単位を比較すると

$$[\text{m} \cdot \text{s}^{-1}] = [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]^a \times [\text{m}]^b$$

$$[\text{m}^1 \cdot \text{s}^{-1}] = [\text{m}^a \cdot \text{s}^{-2a}] \times [\text{m}^b] = [\text{m}^{a+b} \cdot \text{s}^{-2a}]$$

両辺の指数を比較すると $1 = a + b$,

$$-1 = -2a$$

よって $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ すなわち $v = \sqrt{gh}$

となる。

領域 A, B の水深を h_A , h_B とすると

$$v_A = V = \sqrt{gh_A}, \quad v_B = \frac{V}{2} = \sqrt{gh_B}$$

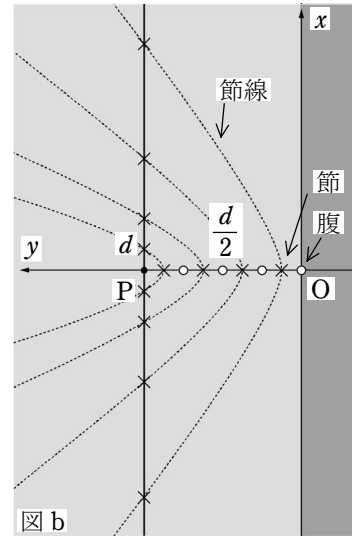
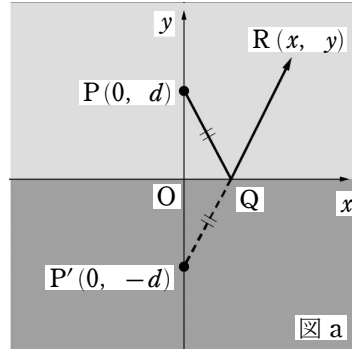
よって $\frac{v_A}{v_B} = 2 = \sqrt{\frac{h_A}{h_B}}$ ゆえに $\frac{h_A}{h_B} = 4$ (倍)

(3) 点 P の x 軸についての対称点を P' とすると、P'(0, -d) であり、P' と R を結ぶ直線と x 軸の交点が Q なので (図 a)

$$PQ + QR = P'Q + QR = P'R = \sqrt{x^2 + (y+d)^2}$$

(4) 直線 $y = d$ 上の点 (x, d) を (3) の点 R とすると、直接波の経路長は $|x|$ なので、直接波と反射波の経路差は $\sqrt{x^2 + (2d)^2} - |x|$ となる。同位相の波源からの波の干渉になるので、弱めあう条件は 経路差 $= \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda_A$ である。

以上より、弱めあう条件は $\sqrt{x^2 + (2d)^2} - |x| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{d}{2}$



y 軸での干渉 (定常波) を考えると、自由端である点 O は腹 (強めあう点) で、そこから $\frac{\lambda_A}{2} = \frac{d}{4}$ 間隔に腹が存在するので、強めあう点の座標は、波源 P も含めると

$y = 0, \frac{d}{4}, \frac{d}{2}, \frac{3}{4}d, d$ である。腹と腹の間に節 (弱めあう点) が存在するので、

OP 間の弱めあう点の座標は $y = \frac{1}{8}d, \frac{3}{8}d, \frac{5}{8}d, \frac{7}{8}d$ の 4 個である。ここから節線が出ていくので、図 b より節線と $y = d$ の交点の個数は **8 個** である*^A。

(5) 波長の整数倍だけ波源 P からの距離の異なる 2 地点は同位相となる。領域 A においては、波源 P から $\lambda_A = \frac{d}{2}$ おきに波源と同位相の位置があるので、原点 O は、波源 P から波 2 個分の距離で同位相である。よって点 S は、点 O からさらに領域 B における波長 $\lambda_B = \frac{d}{4}$ だけ離れた位置である (波源 P から位相が 3 波長分ずれた位置)。

よって点 S の座標は $\left(0, -\frac{d}{4}\right)$

点 S と同位相の点 T は、波源 P と位相が 3 波長分ずれた位置なので、 $PT = 3\lambda_A$ である。 $PO = 2\lambda_A$ であるので

$$OT = \sqrt{(PT)^2 - (PO)^2} = \sqrt{(3\lambda_A)^2 - (2\lambda_A)^2} = \sqrt{5}\lambda_A = \frac{\sqrt{5}}{2}d$$

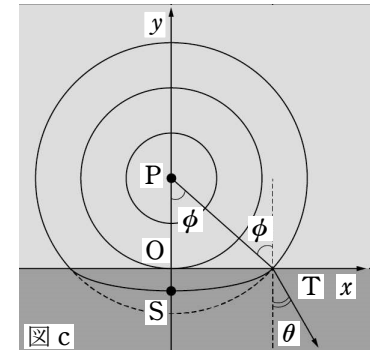
よって点 T の座標は $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}d, 0\right)$

P → T へ進む波の入射角を ϕ とすると、屈折の法則「 $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$ 」より

$$\frac{\sin \phi}{\sin \theta} = \frac{V}{\left(\frac{V}{2}\right)} = 2$$

図 c より $\sin \phi = \frac{OT}{PT} = \frac{\sqrt{5}\lambda_A}{3\lambda_A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

よって $\sin \theta = \frac{1}{2}\sin \phi = \frac{\sqrt{5}}{6}$



[B](1) 原点 O で観測する波源からの直接波の振動数を f_0 とすると、ドップラー効果の

$$\text{式より } f_0 = \frac{v_A - 0}{v_A - (-u)} f = \frac{V}{V + u} f^{*B}$$

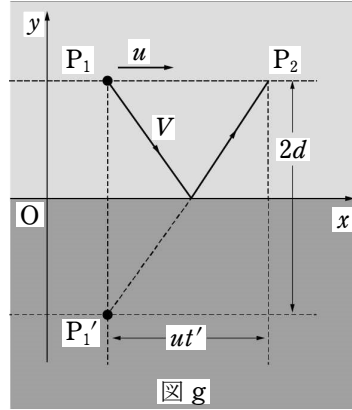
波源で観測される反射波の振動数を f_A とすると、ドップラー効果の式より

$$f_A = \frac{v_A - u}{v_A - 0} f_0 = \frac{V - u}{V} \cdot \frac{V}{V + u} f = \frac{V - u}{V + u} f = \frac{V - u}{V + u} \cdot \frac{2V}{d} \quad \text{※C}$$

原点 O から振動数 f_0 で出た波を、速さ w で遠ざかる観測者が観測する振動数を f_B とすると、ドップラー効果の式より

$$f_B = \frac{v_B - w}{v_B - 0} f_0 = \frac{\frac{V}{2} - w}{\frac{V}{2}} \times \frac{V}{V + u} f = \frac{V - 2w}{V + u} f = \frac{V - 2w}{V + u} \cdot \frac{2V}{d} \quad \text{※D}$$

- (2) 波源から出た波が反射して波源にもどるまでの時間を t' とする。波源から出て反射した後に波源にもどるまでの経路の長さは [A](3) の経路を $x = ut'$ 、 $y = d$ とおくことで求められる。 t' の時間で波が移動する経路の長さが Vt' なので $Vt' = \sqrt{(ut')^2 + (2d)^2}$ が成りたつ t' を求めればよい (図 g 参照)。



$$V^2 t'^2 = u^2 t'^2 + 4d^2 \quad t'^2 = \frac{4d^2}{V^2 - u^2}$$

$$\text{よって } t' = \frac{2d}{\sqrt{V^2 - u^2}}$$

- (3) 波の周期を $T (= \frac{1}{f})$ とすると、波は時間差が mT のときに同位相であるので、

[B](2) における t' が、 $t' = (m + \frac{1}{2})T$ のときに逆位相になる。

$$\text{よって } t' = \frac{2d}{\sqrt{V^2 - u^2}} = (m + \frac{1}{2})T = (m + \frac{1}{2}) \frac{1}{f} = (m + \frac{1}{2}) \frac{d}{2V}$$

$$\text{ゆえに } \frac{4V}{\sqrt{V^2 - u^2}} = m + \frac{1}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{①}$$

$$0 < u < \frac{v}{2} \text{ だから } \frac{\sqrt{3}}{2}V < \sqrt{V^2 - u^2} < V$$

$$\text{すなわち } \frac{1}{V} < \frac{1}{\sqrt{V^2 - u^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}V}$$

$$\text{よって } 4 < \frac{4V}{\sqrt{V^2 - u^2}} < \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.6$$

とわかる。これより、①式の左辺の値は 4 と 4.6 の間でなければならないということなので、条件を満たす整数 m は 4 のみである。①式に $m = 4$ を代入して

$$\frac{4V}{\sqrt{V^2 - u^2}} = 4 + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに } u = \frac{\sqrt{17}}{9}V$$

←※A **別解** 経路差 $\Delta l = \sqrt{x^2 + (2d)^2} - |x|$ で $x > 0$ の場合

$$x = 0 \text{ で } \Delta l = 2d$$

$$x \rightarrow \infty \text{ で } \Delta l \rightarrow 0$$

弱めあう条件は

$$\Delta l = \left(\frac{1}{2} + n\right)\lambda_A = \left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{d}{2}$$

$$\text{よって } 0 < \left(\frac{1}{2} + n\right)\frac{d}{2} < 2d$$

$$0 < 1 + 2n < 8$$

これを満たす n は、0, 1, 2, 3 の 4 個。

$x < 0$ の場合も同様に 4 個。

よって合計 **8 個**。

←※B

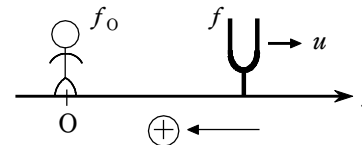


図 d

←※C

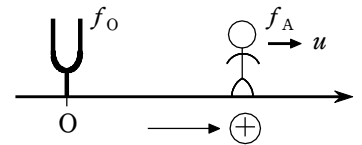


図 e

←※D

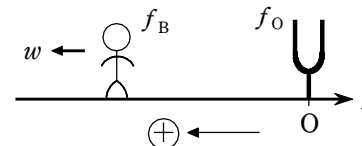


図 f

2.

水面にできる波について考えよう。水平面上に座標軸 x, y および原点 O をとる。また各点での水面の鉛直方向の変位を z で表し、波がない場合を $z=0$ とする。

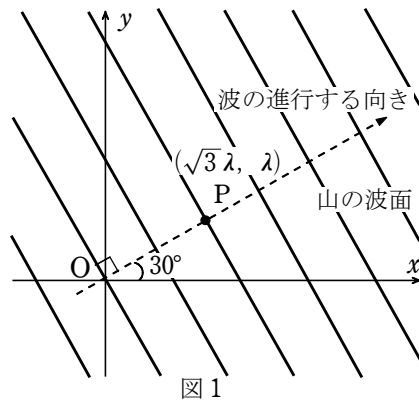


図1

[A] いま、図1の破線の矢印に示されるように、 x 軸に対して 30° の向きに進む平面波を考える。図1で、時刻 $t=0$ における波の山の波面が実線で表されており、その1つは原点を通っている。この波は正弦波で表すことができるものとし、波の振幅の減衰はないものとする。波の振幅を A 、周期を T 、波長を λ とする。

- (1) 時刻 t での点 $P(\sqrt{3}\lambda, \lambda)$ における水面の変位 z_P を求めよ。
- (2) 時刻 $t=0$ において点 P を通る波の山の波面は、時間とともに進行する。その山の波面の進行速度の x 成分、 y 成分をそれぞれ求めよ。
- (3) 時刻 $t=0$ における y 軸上での波形をかけ。なおこの波形は正弦波となる。

[B] 次に、図2の破線の矢印に示されるように、 x 軸に対して 30° の向きに進む平面波と、 y 軸の正の向きに進む平面波が同時に存在する場合を考える。図2で、時刻 $t=0$ における2種類の波の山の波面が実線で表されており、山の波面の1つずつが原点を通っている。これらの波は、ともに振幅 A 、周期 T 、波長 λ の正弦波で表すことができるものとし、波の振幅の減衰はないものとする。

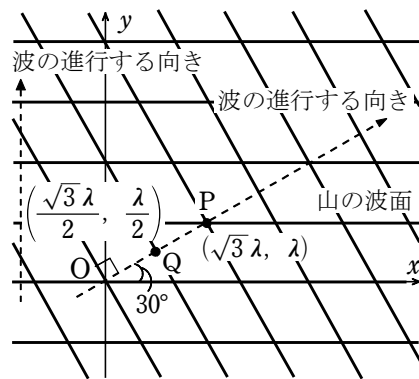


図2

- (4) 時刻 t での点 $P(\sqrt{3}\lambda, \lambda)$ における水面の変位 z_P を求めよ。
- (5) 時刻 t での点 $Q\left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ における水面の変位 z_Q を求めよ。
- (6) 図2に示した時刻 $t=0$ の瞬間、点 P において、2つの平面波の山が重なって高い山となっている。この高い山は、2つの波の進行とともに移動する。この高い山の移動を追跡することを考える。時刻 $t=T$ における、この高い山の位置を P' として、点 P' の位置を図2に示せ。

- (7) 時刻 $t=0$ において点 P にある高い山の移動速度の x 成分、 y 成分をそれぞれ求めよ。

[C] 次に図3のように、 y 軸の正の向きに進む平面波と、原点 O を波源とする球面波が同時に存在する場合を考える。図3で、時刻 $t=0$ における2種類の波の山の波面が実線で表されており、山の波面の1つずつが点 $P(\sqrt{3}\lambda, \lambda)$ を通っている。すなわち、点 P においては、2つの波の山が重なって高い山となっている。これらの波は、振幅 A 、周期 T 、波長 λ の正弦波で表すことができるものとし、簡単のため波の振幅の減衰はないものとする。

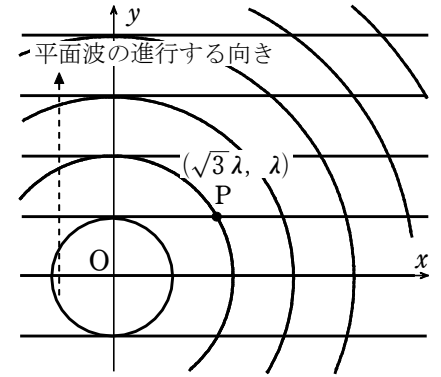


図3

- (8) この高い山の移動を追跡することを考える。高い山の移動速度の x 成分、 y 成分の時間変化を表すグラフの概形として適当なものを図4の①~⑩よりそれぞれ選べ。なお同じものを2回選んでもよい。

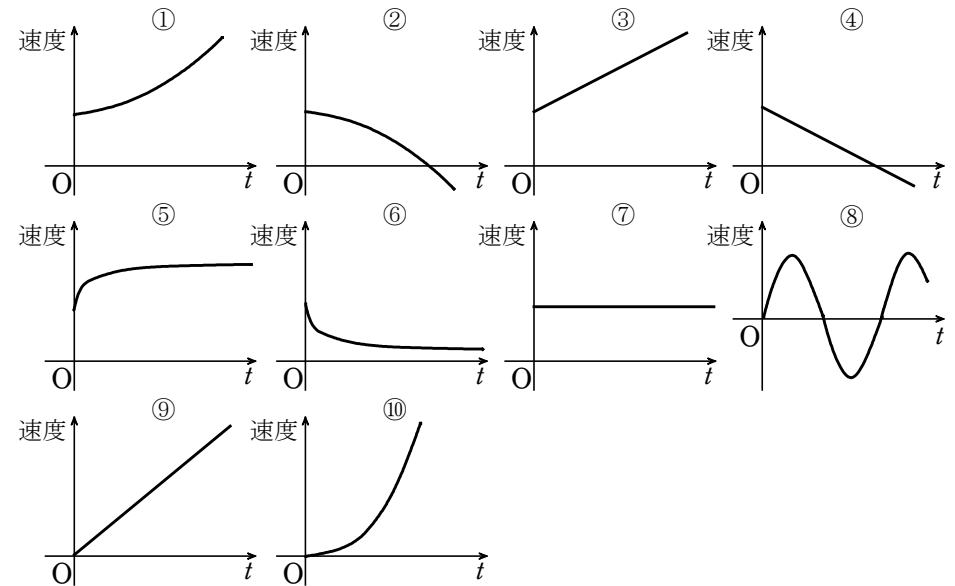


図4

- (9) この高い山のかく軌跡の概形として適当なものを図5の①~⑥より1つ選べ。

(10) 時刻 $t=0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}$ の3つの瞬間における y 軸上の波形を図6にかけ。

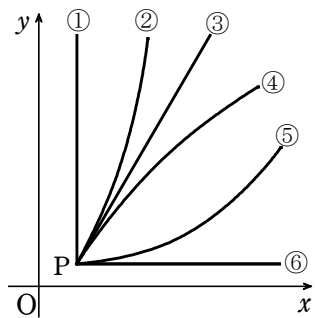


図5

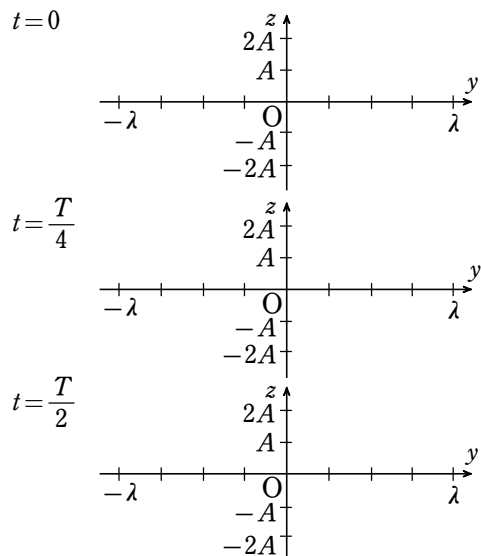
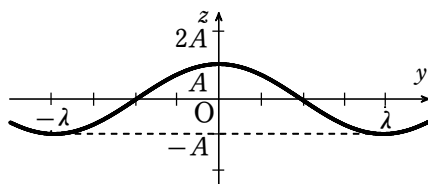


図6

【解答】 [A] (1) $A \cos \frac{2\pi}{T} t$

(2) x 成分: $\frac{\sqrt{3}\lambda}{2T}$, y 成分: $\frac{\lambda}{2T}$

(3) 右図



[B] (4) $2A \cos \frac{2\pi}{T} t$

(5) 0

(6) 右図

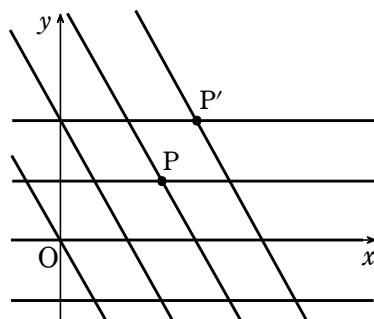
(7) x 成分: $\frac{\lambda}{\sqrt{3}T}$,

y 成分: $\frac{\lambda}{T}$

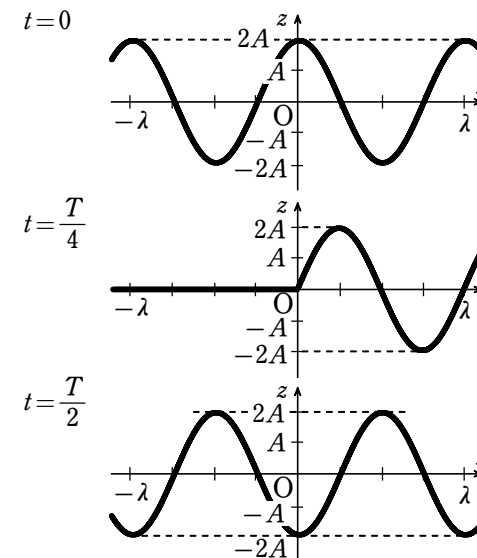
[C] (8) x 成分 …… ⑥,

y 成分 …… ⑦

(9) ②



(10) 右図



【解説】

[A](1) 水面の各点は周期 T で単振動している。点 P は、時刻 $t=0$ で変位 A であるから

$$z_P = A \cos \frac{2\pi}{T} t$$

(2) 波の速さを v とする。波の基本式「 $v = f\lambda$ 」, 周期は振動数の逆数であることから $v = \frac{\lambda}{T}$ と書ける。波の進行方向は x 軸と 30° の角をなすので

x 成分: $v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2T}$

$$x \text{ 成分: } v \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2T}$$

$$y \text{ 成分: } v \sin 30^\circ = \frac{\lambda}{2T}$$

(3) $t=0$ において、 y 軸上の山の位置を

y_1, y_2, \dots とする。図 a より

$$\frac{\lambda}{y_1} = \sin 30^\circ$$

$$y_1 = 2\lambda$$

よって、波形は図 b のようになる。

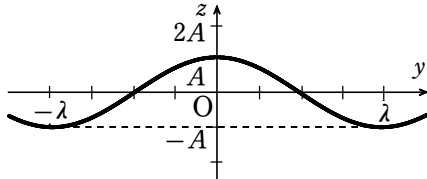


図 b

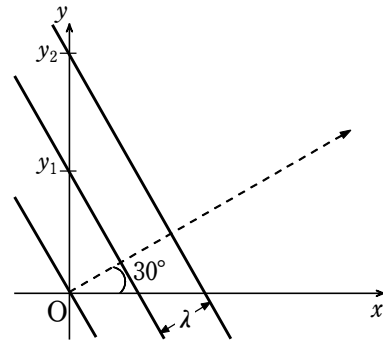


図 a

[B](4) 図 2 より、点 P は $t=0$ で変位 $2A$ となっている。周期は T で変わらないから

$$z_P = 2A \cos \frac{2\pi}{T} t$$

(5) 点 Q は $t=0$ で変位 0 である。点 Q では、2 種類の波は逆位相となっているので、変位は常に 0 である。 $z_Q = 0$

(6) 1 周期後には、2 つの波の 1 波長ずつ先に進んでいくので、点 P' は図 c の位置となる。

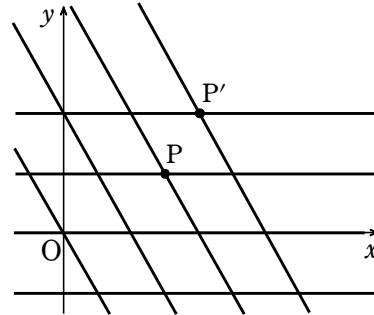


図 c

(7) 図 c を拡大したものを図 d に示す。

PP' と x 軸のなす角は 60° である。よって、時間 T の間に進む x, y 方向の距離は、それぞれの速度成分を v_x, v_y として

$$x : v_x T, y : v_y T$$

図 d より

$$\frac{\lambda}{v_x T} = \tan 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad v_x = \frac{\lambda}{\sqrt{3} T}$$

$$v_y T = \lambda \quad \text{ゆえに} \quad v_y = \frac{\lambda}{T}$$

$$x \text{ 成分} : \frac{\lambda}{\sqrt{3} T} \quad y \text{ 成分} : \frac{\lambda}{T}$$

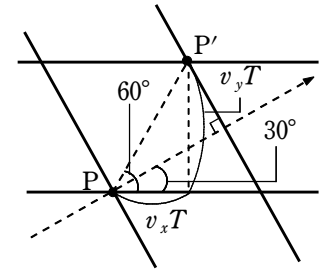


図 d

[C](8) 1 周期経過するごとに点 P の波は、図 3 の波面の 1 つ先に進んでいく。よって、移動速度の x 成分はしだいに小さくなり、 y 成分は一定である。ゆえに

$$x \text{ 成分} \dots\dots \textcircled{6} \quad y \text{ 成分} \dots\dots \textcircled{7}$$

(9) 図 3 の交点をなめらかにつないだ曲線となるから ② である。

(10) $t=0$ では、 $y=0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \dots$ で変位が $2A$ となっている。 $t=\frac{T}{4}$ のとき

$y \geq 0$ では 2 つの波の進行の向きが等しいので、山の位置が $t=0$ のときに比べて $\frac{\lambda}{4}$ だけ上方にずれる。一方 $y < 0$ では、2 つの波の進行の向きが逆向きのため定常波ができており、このとき 2 つの波の位相差が π となるため、変位はどこでも 0 である。 $t=\frac{T}{2}$ のとき $y \geq 0$ ではさらに $\frac{\lambda}{4}$ 進み、 $y < 0$ では、2 つの波の位相差が 2π となり強めあうかたちとなる。よって、図 e のようになる。

