1．

図1に示すように，水平な2つの地層(地層 Ⅰ と地層 Ⅱ)があり，地表面に一定の振幅の縦波を発生させる装置(以下，震源とよぶ)が設置されている。震源から1周期分だけの波を発生させ，地層中を伝わった縦波を任意の位置の地表面の受振点で観測し，震源からの到達時間を計測する。なお，震源からの縦波は減衰することなく伝わるものとする。以下の問いに答えよ。

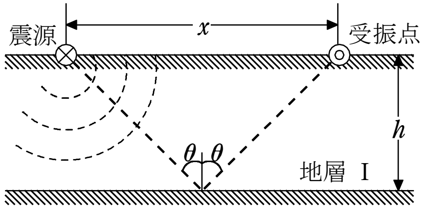


図1

(1) 図1は震源からの波が地層 Ⅰ と地層 Ⅱ の境界面で反射の法則にしたがって反射し，地表面の受振点に到達する反射波とよばれる波の伝わり方を示す。震源からの距離 x が異なる2つの受振点(受振点1と受振点2)で，反射波の到達時間に関して表1に示す計測結果を得た。

表1　到達時間の計測結果

	震源から受振点までの距離 x	反射波の到達時間 t
受振点1	a	t_a
受振点2	b $(b>a)$	t_b $(t_b>t_a)$

(a) 地層 Ⅰ での縦波の伝わる速さ v，および地層 Ⅰ の厚さ h を，計測結果(a，b，t_a，t_b)を用いて表せ。

(b) 地層 Ⅱ の縦波の伝わる速さが地層 Ⅰ での速さ v の p 倍 $(p>1)$ のとき，地層 Ⅰ と地層 Ⅱ の境界面で波が光のように全反射するための入射角 θ の条件を求めよ。

(2) 地層中での縦波の伝わり方を考える。震源から発生する縦波は振幅が A，波長が λ，周期が T の正弦波である。また，地層は図2のように，波の進行方向に質量 m の球がばね定数 k のばねで一定間隔で一列につながったもので表す。球の質量 m は地層を等間隔でわけた1区間分の質量に対応し，ばね定数 k は地層の変形のしにくさに関係する。ここでは球の間隔を波長 λ の12分の1$\left(\dfrac{\lambda}{12}\right)$とする。次の文中の ア から ケ に適切な数式，数値または語句を記入せよ。

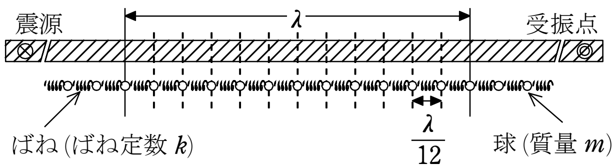


図2

図3は縦波がちょうど位置Qの球に到達したときの，球のつりあいの位置からのずれ(変位)を縦軸にとった波形(球の変位)を示す。音波や地震波のP波などの縦波は振動方向が波の伝わる方向と平行な波で，ア ともよばれる。ここでは波形が一周期の正弦曲線であることから，1つの球においては $\dfrac{2\pi}{T}$ の角振動数で単振動しているとみなせる。波が球B(黒塗り)に到達してから時間 t 後の球Bの変位は $A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$，加速度は $-A\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ と表すことができる。波が球Bに到達してから位置Qに達するまでの時間は $\dfrac{T}{4}$ であるので，波が位置Qに達したときの球Bの変位は A，加速度は イ である。また，球Bの速度は ウ である。さらにこのとき，球Bの両隣の球(位置Qから2番目と4番目の球)の変位は球Bと同じように考えると，ともに同じ値 エ となる。球Bと両隣の球との変位の差より，球Bに作用するばねによる力は オ と表される。以上のことから，球Bに関する運動方程式は カ となる。この運動方程式に周期 T と波の伝わる速さ v との関係 キ を代入して整理すると，地層中での縦波の伝わる速さ v は ク となる。これより，例えば，ばね定数 k が2倍となる硬い地層では，縦波の伝わる速さ v は ケ 倍となることがわかる。

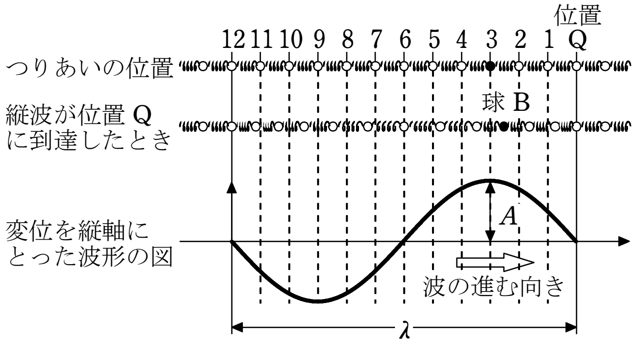


図3

解答　(1)　(a)　v: $\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{t_b{}^2-t_a{}^2}}$，$h$: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b^2t_a{}^2-a^2t_b{}^2}{t_b{}^2-t_a{}^2}}$　(b)　$\sin\theta>\dfrac{1}{p}$

(2)　(ア)　疎密波　(イ)　$-A\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2$　(ウ)　0　(エ)　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}A$

(オ)　$-(2-\sqrt{3})kA$　(カ)　$m\left\{-A\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\right\}=-(2-\sqrt{3})kA$

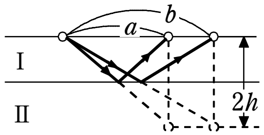
(キ) $T=\dfrac{\lambda}{v}$ (ク) $\dfrac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})k}{m}}$

(ケ) $\sqrt{2}$

解説

(1)(a) では受振点を地層 Ⅰ，Ⅱ の境界線に対して対称の位置に移して考えると求め易い。(オ) では両隣のばねから受ける力の和をとる。

(1) (a) 図のように考えると，震源から受振点まで波の伝わる距離は



$x=a$ のとき $\sqrt{a^2+(2h)^2}$

$x=b$ のとき $\sqrt{b^2+(2h)^2}$

よって $v=\dfrac{\sqrt{a^2+(2h)^2}}{t_a}=\dfrac{\sqrt{b^2+(2h)^2}}{t_b}$

$v^2{t_a}^2=a^2+(2h)^2$ ……①

$v^2{t_b}^2=b^2+(2h)^2$ ……②

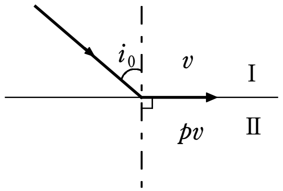
①，② 式より $v^2{t_a}^2-a^2=v^2{t_b}^2-b^2$

よって $v=\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{{t_b}^2-{t_a}^2}}$

上式を ① 式に代入して $\dfrac{b^2-a^2}{{t_b}^2-{t_a}^2}\cdot{t_a}^2-a^2=(2h)^2$

よって $h=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b^2{t_a}^2-a^2{t_b}^2}{{t_b}^2-{t_a}^2}}$

(b) 臨界角を i_0 とすると



屈折の法則$\left(\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{v_1}{v_2}\right)$より

$pv\cdot\sin i_0=v\cdot\sin 90°$

$\sin i_0=\dfrac{v}{pv}=\dfrac{1}{p}$

θ は臨界角 i_0 より大きければよいから，θ の条件は

$\sin\theta>\dfrac{1}{p}$

(2) (ア) **疎密波**

(イ) 加速度を α として，加速度の与式に $t=\dfrac{T}{4}$ を代入する。

$$\alpha=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right)=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin\frac{\pi}{2}=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\times 1$$

$$=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

(ウ) 時刻 t での速度は $A\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ であるから，求める速度を v として，t に $\dfrac{T}{4}$ を代入すると

$$v=A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right)=A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cos\frac{\pi}{2}=A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\times 0=\mathbf{0}$$

(エ) 位置 Q から 2 番目の球に波が到達してから位置 Q に達するまでの時間は $\dfrac{T}{6}$ であるから，変位の式に $\dfrac{T}{6}$ を代入すると

$$A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{6}\right)=A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

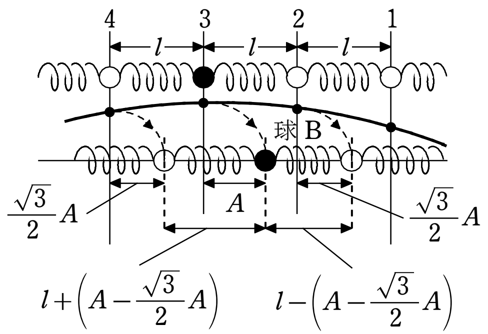
同様にして，位置 Q から 4 番目の球については時間に $\dfrac{T}{3}$ を代入して

$$A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{3}\right)=A\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

よって，変位はともに $\dfrac{\sqrt{3}}{2}A$

(オ) 下図に示すように，B の左側のばねの伸びは $A\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，右側のばねの縮みは $A\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で，B にはたらくばねの弾性力はともに左向きで，大きさは $kA\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。合力を F とすると

$$F=-2kA\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-(2-\sqrt{3})kA$$



(カ)　運動方程式 ($ma=F$) に (イ), (オ) の結果を代入して

$$m\left\{-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right\}=-(2-\sqrt{3})kA$$

(キ)　波の基本式 $\left(v=f\lambda=\dfrac{\lambda}{T}\right)$ より　$T=\dfrac{\lambda}{v}$

(ク)　(カ), (キ) より　$m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2=m\left(\dfrac{2\pi v}{\lambda}\right)^2=(2-\sqrt{3})k$

よって　$v=\dfrac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})k}{m}}$

(ケ)　(ク) より，v は $\sqrt{k}$ に比例する。よって，k が 2 倍になると v は $\sqrt{2}$ 倍になる。
答えは $\sqrt{2}$

2．

弦の振動を次のようにモデル化して考える。質量 M の N 個の粒子を糸でつなぎ，張力 S で水平に張って両端を固定する。

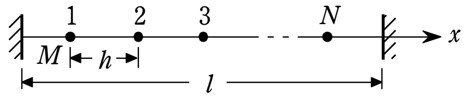


図 1

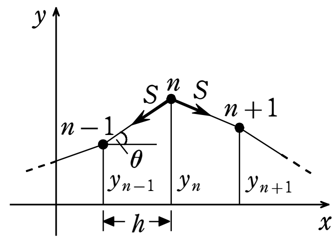


図 2

図 1 のように，静止状態で粒子は等間隔 h で並んでいるとし，左から 1，2，……N と番号付けしておく。弦の長さを l とし，静止状態の弦に沿って x 軸をとる。ここで，各粒子は上下方向にのみ運動するものとし，鉛直方向上向きに y 軸をとる。各粒子の静止状態からの変位を y_1，y_2，……y_N，加速度をそれぞれ a_1，a_2，……a_N とする。このモデルが弦の振動をよく近似するためには，弦の長さ l に比べて粒子間隔 h は十分小さく，かつ隣りあう粒子の変位の差は h より十分小さいことが必要である。さらに変位の差が十分小さいので，糸の張力 S は振動中変化しないものと仮定する。すなわち，$l\gg h\gg|y_n-y_{n-1}|$ ($n=2$，3，…，N)，$S=$一定 である。次の文章に沿って空欄 (ア)〜(ケ) を埋めよ。空欄 (ケ) は単位を付けて有効数字 2 桁で答えよ。なお，重力の影響は無視せよ。

(1)　図 2 に示すように，n 番目の粒子は左右の糸から張力 S の鉛直成分の力を受けて運動する。まず左側の糸について，図 2 で糸が x 軸となす角を θ とすると，$|y_n-y_{n-1}|\ll h$ であるから，$\sin\theta$ は，

$$\sin\theta=\frac{y_n-y_{n-1}}{\sqrt{h^2+(y_n-y_{n-1})^2}}\approx\frac{y_n-y_{n-1}}{h}$$

と近似できる。したがって，n 番目の粒子が左側の糸から受ける鉛直方向上向きの力は $\boxed{\quad ア \quad}$ となる。同様にして右側の糸から受ける鉛直方向上向きの力は $\boxed{\quad イ \quad}$ となる。これより，n 番目の粒子の運動方程式 $Ma_n=\dfrac{S}{h}(y_{n-1}-2y_n+y_{n+1})$ が得られる。

(2)　正弦波が弦を x の正の方向に伝わるとき，各粒子は同じ周期 T と同じ振幅 A の単振動をしている。正弦波の波長を λ とし $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ とおくと，n 番目の粒子の変位は，

$y_n(t)=A\sin\left(\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}nh\right)$ (ただし，$n=1$，2，……，N) と表される。y_{n-1}，y_{n+1} に

三角関数の加法定理を用いると，$y_{n-1}+y_{n+1}=\boxed{\text{ウ}}y_n$ となる。また，加速度 a_n と変位 y_n は単振動の関係式 $a_n=\boxed{\text{エ}}y_n$ を満たす。これらを (1) の運動方程式に代入し整理すると，$\omega=\boxed{\text{オ}}\sin\left(\dfrac{\pi h}{\lambda}\right)$ となる。

(3) このモデルにおいて弦の線密度 ρ は $\boxed{\text{カ}}$ と表される。さらに，波長 λ が h に比べ十分に大きいとき，$\sin(x)\approx x$ ($|x|\ll 1$) の近似を使えば，弦を伝わる横波の速さ v は，ρ を用いて $\boxed{\text{キ}}$ と表される。

(4) (2) の正弦波と固定端での反射波の重ねあわせによって定常波が形成される。腹の数が m 個の定常波が生じているとき，その振動数 f_m は $\boxed{\text{ク}}$ となる。いま，長さ 1.0 m，質量 1.0 g の鉄線の一端を 0.50 kgw の力で水平に張ったとき，この弦の基本振動の振動数は $\boxed{\text{ケ}}$ となる (単位の換算には重力加速度の大きさの値に 9.8 m/s^2 を使うこと)。

解答 (1) (ア) $\dfrac{S}{h}(y_{n-1}-y_n)$ (イ) $\dfrac{S}{h}(y_{n+1}-y_n)$

(2) (ウ) $\left\{2\cos\left(\dfrac{2\pi h}{\lambda}\right)\right\}$ (エ) $-\omega^2$ (オ) $2\sqrt{\dfrac{S}{Mh}}$

(3) (カ) $\dfrac{NM}{(N+1)h}$ (キ) $\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$ (4) (ク) $\dfrac{m}{2l}\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$ (ケ) 35 Hz

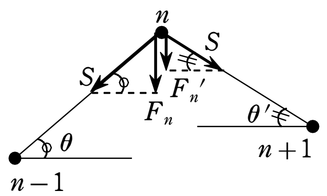
解説

問題の誘導に従って考えを進めればよい。(エ) では，角振動数 ω の単振動の変位 x と加速度 a_x の関係式 $a_x=-\omega^2 x$ を用いる。最後は，弦の固有振動の式を用いる。

(1) (ア) 求める力を F_n とすると，鉛直上向きの力が正だから

$$F_n=-S\sin\theta$$

$$=-S\cdot\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=\frac{S}{h}(y_{n-1}-y_n)$$



(イ) 右側の糸が x 軸となす角を θ' とすると，

$y_n>y_{n+1}$ だから $\sin\theta'\approx\dfrac{y_n-y_{n+1}}{h}$

求める力を F_n' とすると

$$F_n'=-S\sin\theta'=\frac{S}{h}(y_{n+1}-y_n)$$

(2) (ウ) $y_{n-1}+y_{n+1}=A\sin\left\{\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}(n-1)h\right\}+A\sin\left\{\omega t-\dfrac{2\pi}{\lambda}(n+1)h\right\}$

$$=2A\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}nh\right)\cos\frac{2\pi h}{\lambda}$$

$$=\left\{2\cos\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)\right\}y_n$$

注 ここでは，$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を用いた。

(エ) 角振動数が ω，変位が y_n だから，加速度 a_n は $a_n=(-\omega^2)y_n$

(オ) 運動方程式より

$$M(-\omega^2)y_n=\frac{S}{h}\left\{2\cos\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)-2\right\}y_n$$

ゆえに $\omega^2=\dfrac{2S}{Mh}\left\{1-\cos\left(\dfrac{2\pi h}{\lambda}\right)\right\}$

半角の公式 $1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$ より

$$\omega=\left(2\sqrt{\frac{S}{Mh}}\right)\sin\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right) \quad\cdots\cdots ①$$

(3) (カ) 弦の長さは l で，質量 M の粒子が N 個つながっていて，また，$l=(N+1)h$

より $\rho=\dfrac{NM}{l}=\dfrac{NM}{(N+1)h}$

(キ) h は十分小さいので，N は十分大きく，$N+1\approx N$ と近似できる。したがって

$\rho\approx\dfrac{M}{h}$ ゆえに $M\approx\rho h$

また，$\sin\left(\dfrac{\pi h}{\lambda}\right)\approx\dfrac{\pi h}{\lambda}$

これを ① 式に代入すると $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2\sqrt{\dfrac{S}{\rho h^2}}\cdot\dfrac{\pi h}{\lambda}=\dfrac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$

よって $T=\lambda\sqrt{\dfrac{\rho}{S}}$

したがって $v=\dfrac{\lambda}{T}=\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$

(4) (ク) m 倍振動だから $f_m=\dfrac{m}{2l}v=\dfrac{m}{2l}\sqrt{\dfrac{S}{\rho}}$

(ケ) 上の式に $m=1$，$l=1.0$ (m)，$S=0.50\times 9.8=4.9$ (N)，

$\rho=\dfrac{1.0\times 10^{-3}}{1.0}=1.0\times 10^{-3}$ (kg/m)

を代入すると $f_1=\dfrac{1}{2\times 1.0}\sqrt{\dfrac{4.9}{1.0\times 10^{-3}}}=35$ (Hz)