１．

図１のように，断面積が S で長さが $4L$ の円筒容器を，２つのなめらかに動くピストンで，３つの部屋に仕切る。２つのピストンは厚みが十分に薄く，また，これらは自然の長さが $2L$ でばね定数が K の軽いばねでつないである。初め左右の部屋の体積は等しく SL であり，それぞれに，圧力が大気圧 P になるように絶対温度 T の理想気体が入っている。この理想気体１ mol が絶対温度 T のときにもっている内部エネルギーは気体定数 R を用いて $\frac{3}{2}RT$ である。以下で，真ん中の部屋は，適切な位置にある穴があいていて大気で満たされており，常に大気圧 P，温度 T に保たれている。

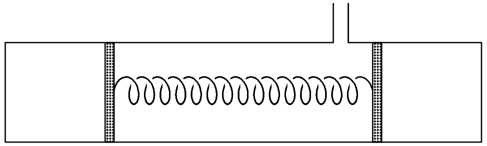


図１

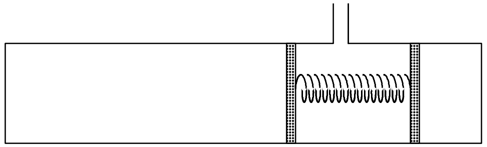


図２

図１ 状態変化前のようす。図２ 状態変化後のようす。真ん中の部屋にあいた穴は，本問で考える状態変化の間に，左右の部屋の理想気体がもれることがない位置にある。

左の部屋に入っている理想気体をゆっくりと熱していくと，図２のように，ばねの長さが L になった。すなわち，真ん中の部屋の体積が SL となった。この際，右の部屋の理想気体の温度は，大気と熱をやりとりすることで，常に T に保たれている。一方，左の部屋は十分に断熱性が保たれているとする。この状態変化について次の問いに答えよ。

(1)　右の部屋の理想気体の体積が，いくつになったか求めよ。

(2)　左の部屋の理想気体の絶対温度が，いくつになったか求めよ。

(3)　ばねに蓄えられたエネルギーを求めよ。

(4)　左の部屋の理想気体が大気にした仕事を求めよ。ただし，左の部屋の理想気体は大気とばねに仕事をしており，このうち大気にした分の仕事を求めればよい。

(5)　右の部屋の理想気体が大気からされた仕事を求めよ。

(6)　(2)〜(5) の結果を利用し，左の部屋の理想気体に与えた熱量を Q として，右の部屋の理想気体が大気に与えた熱量を求めよ。

解答　(1)　$\dfrac{PS^2L}{PS+KL}$　　(2)　$\dfrac{2PS+3KL}{PS}T$　　(3)　$\dfrac{1}{2}KL^2$　　(4)　$PSL\dfrac{PS+2KL}{PS+KL}$

(5)　$PSL\dfrac{KL}{PS+KL}$　　(6)　$Q-\dfrac{5}{2}(PS+2KL)L$

解説

(1)　右の部屋の圧力を P' とおく。ばね定数 K のばねが自然の長さより L 縮んでいるので，フックの法則「$F=kx$」より，弾性力は KL となる。よって，右のピストンにはたらく力のつりあいの式から

$$PS+KL-P'S=0$$

ゆえに　$P'=P+\dfrac{KL}{S}$

一方，右の部屋は温度が T に保たれているので，ボイルの法則「$pV=$一定」より，求める体積を V として

$$PSL=P'V$$

よって　$V=\dfrac{PSL}{P'}=\dfrac{PSL}{P+\dfrac{KL}{S}}=\boldsymbol{\dfrac{PS^2L}{PS+KL}}$

(2)　左の部屋の圧力は，(1) と同じように力のつりあいを考えると P' となる。また，左の部屋の体積を V' とすると

$$V'=4SL-SL-V$$
$$=3SL-\frac{PS^2L}{PS+KL}=SL\left(3-\frac{PS}{PS+KL}\right)=SL\frac{2PS+3KL}{PS+KL}$$

よって，求める温度を T' とおくと，ボイル・シャルルの法則「$\dfrac{pV}{T}=$一定」より

$$\frac{PSL}{T}=\frac{P'V'}{T'}$$

ゆえに

$$T'=\frac{P'V'T}{PSL}$$
$$=\frac{T}{PSL}\cdot\left(P+\frac{KL}{S}\right)\cdot SL\frac{2PS+3KL}{PS+KL}=\frac{T}{PS}\cdot(PS+KL)\cdot\frac{2PS+3KL}{PS+KL}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2PS+3KL}{PS}T}$$

(3)　弾性力による位置エネルギーの式「$U_k=\dfrac{1}{2}kx^2$」より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}KL^2}$

(4)　状態変化の前後における左の部屋の体積変化 $\varDelta V'$ は

$$\varDelta V'=V'-SL$$
$$=SL\frac{2PS+3KL}{PS+KL}-SL=SL\left\{\frac{2PS+3KL-(PS+KL)}{PS+KL}\right\}=SL\frac{PS+2KL}{PS+KL}$$

真ん中の部屋の圧力は大気圧 P に保たれているので，気体がした仕事の式「$W'=p\varDelta V$」を用いると，求める仕事は

$$P\varDelta V' = PSL\frac{PS+2KL}{PS+KL}$$

(5)　(4) と同様に考える。右の部屋の体積変化を $\varDelta V$ とし，$\varDelta V<0$ に注意して (1) の結果を用いると，求める仕事は

$$-P\varDelta V = -P\left(\frac{PS^2L}{PS+KL} - SL\right) = PSL\left(1-\frac{PS}{PS+KL}\right) = PSL\frac{KL}{PS+KL}$$

(6)　熱する前の左の部屋の理想気体の物質量を n とすると，理想気体の状態方程式「$pV=nRT$」より

$$nR = \frac{PSL}{T} \quad \cdots\cdots ①$$

また，単原子分子理想気体の内部エネルギーの変化の式「$\varDelta U = \frac{3}{2}nR\varDelta T$」より，左の部屋の理想気体の内部エネルギーの変化 $\varDelta U'$ は

$$\varDelta U' = \frac{3}{2}nR(T'-T)$$

ここで，① 式より

$$\varDelta U' = \frac{3}{2}\frac{PSL}{T}(T'-T) = \frac{3PSL}{2T}\left(\frac{2PS+3KL}{PS}-1\right)T = \frac{3L}{2}(PS+3KL)$$

よって，熱力学第一法則「$\varDelta U = Q+W$」より，左の部屋の理想気体が外部にした仕事 W' は

$$W' = Q - \varDelta U' = Q - \frac{3L}{2}(PS+3KL) = Q - \frac{3}{2}PSL - \frac{9}{2}KL^2$$

一方，右の部屋の理想気体は絶対温度が変化しておらず内部エネルギーの変化がないので，外部からされた仕事を熱量として大気に与えている。このとき，右の部屋の理想気体が外部からされた仕事は，大気からされた仕事とばねからされた仕事の 2 つである。大気からされた仕事は (5) の結果である。また，ばねからされた仕事は，左の部屋の理想気体がばねにした仕事 W'' から (3) で求めたばねに蓄えられたエネルギーを除くことで求められる。W'' は W' から (4) で求めた左の部屋の理想気体が大気にした仕事を除いたものである。よって，求める熱量は

$$\begin{aligned}
&(-P\varDelta V) + \left(W'' - \frac{1}{2}KL^2\right)\\
&= (-P\varDelta V) + \left\{(W' - P\varDelta V') - \frac{1}{2}KL^2\right\} = W' - \frac{1}{2}KL^2 - P\varDelta V - P\varDelta V'\\
&= Q - \frac{3}{2}PSL - \frac{9}{2}KL^2 - \frac{1}{2}KL^2 + PSL\frac{KL}{PS+KL} - PSL\frac{PS+2KL}{PS+KL}\\
&= Q - \frac{3}{2}PSL - 5KL^2 - PSL\frac{PS+KL}{PS+KL} = Q - \frac{5}{2}(PS+2KL)L
\end{aligned}$$

2．

温度 T_0 の大気中に断熱材の壁で囲まれた部屋があり，内部には n〔mol〕の単原子分子理想気体が封入されている。図１のように壁にはシリンダーが設置されており，その内部には 1 mol の単原子分子理想気体が封入されている。このシリンダー内の気体を介してのみ，部屋の内部の気体と大気との間で熱のやりとりを行うことができる。シリンダー内の気体の体積はなめらかに動く２つのピストンA，Bにより自由に変えることができる。初めの状態では，部屋とシリンダー内の気体の温度は大気と同じ T_0 であり，シリンダー内の気体の圧力は p_0，体積は V_0 であった。大気の温度は常に一定であるとして，次の問いに答えよ。ただし，ピストンの移動に伴う部屋の内部の体積変化はないものとする。必要に応じて，単原子分子理想気体の断熱変化では，$pV^{\frac{5}{3}}=$一定 の関係があることを用いよ。

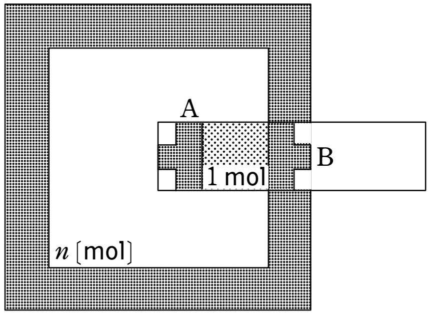


図１

(1)　シリンダー内の気体はすべて部屋側にあった (図１)。ピストンＡのみをすばやく動かしてシリンダー内の気体の体積を $\frac{1}{2}V_0$ に断熱圧縮させたときの気体の圧力 p_1，温度 T_1，気体が外部にした仕事 W_1 を求めよ。

(2)　２つのピストンを固定し，その後十分に時間を経過させると部屋とシリンダー内の気体の温度は等しくなった。このときのシリンダー内の気体の圧力 p_2，温度 T_2，気体が外部にした仕事 W_2 を求めよ。

(3)　２つのピストンを動かし，シリンダー内の気体の体積と温度を一定に保ちながら熱のやりとりがないように気体を部屋の外側に移動させた (図２)。その後ピストンＢのみをすばやく動かしてシリンダー内の気体の体積を V_0 に断熱膨張させた。このときのシリンダー内の気体の圧力 p_3，温度 T_3，気体が外部にした仕事 W_3 を求めよ。

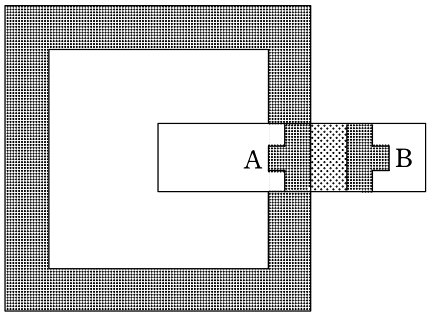


図２

(4)　２つのピストンを固定し，十分に長い時間を経過させてシリンダー内の気体の温度を T_0 にもどした。T_0，T_1，T_2，T_3 の大小関係を示せ。

(5)　２つのピストンを動かし，シリンダー内の気体の体積と温度を一定に保ちながら熱のやりとりがないように気体を部屋の内側に移動させた。これまでの一連の操作におけるシリンダー内部の気体の状態変化の概略を，横軸を体積，縦軸を圧力としたグラフに示せ。

(6)　引き続き，一連の操作を行った。２回目の (1)，(2)，(3) の操作後のシリンダー内の気体の温度をそれぞれ T_1'，T_2'，T_3' とする。T_1 と T_1'，T_2 と T_2'，および T_3 と T_3' の大小関係を示せ。

(7)　一連の操作をくり返すと，部屋の内部の気体の温度はどのように変化するか論ぜよ。

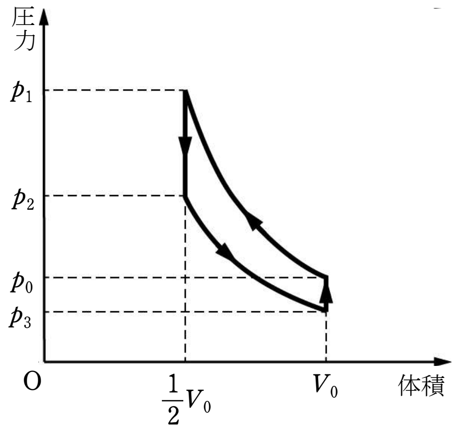
解答　(1)　$p_1 : 2^{\frac{5}{3}}p_0$，$T_1 : 2^{\frac{2}{3}}T_0$，$W_1 : -\frac{3}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)p_0V_0$

(2)　$p_2 : \frac{2n+2^{\frac{5}{3}}}{n+1}p_0$，$T_2 : \frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}T_0$，$W_2 : 0$

(3)　$p_3 : \frac{2^{-\frac{2}{3}}n+1}{n+1}p_0$，$T_3 : \frac{2^{-\frac{2}{3}}n+1}{n+1}T_0$，$W_3 : \frac{3\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)\left(2^{-\frac{2}{3}}n+1\right)}{2(n+1)}p_0V_0$

(4)　$T_3<T_0<T_2<T_1$

(5)



(6)　$T_1'=T_1$，$T_2'>T_2$，$T_3'>T_3$

(7)　(6) の結果より，１サイクル毎に部屋の気体の温度は上昇していき，シリンダー内の気体は T_1 を保つ。よって，部屋の気体の温度が T_1 になったとき熱の移動は行われない。ゆえに，一連の操作をくり返すと部屋の気体の温度が

$T_1=2^{\frac{2}{3}}T_0$ に近づいていく。

解説

(1)　断熱変化なので，問題文で与えられた式を用いて

$$p_0{V_0}^{\frac{5}{3}}=p_1\left(\frac{1}{2}V_0\right)^{\frac{5}{3}}$$

よって　$p_1=\boldsymbol{2^{\frac{5}{3}}p_0}$

また，ボイル・シャルルの法則「$\dfrac{pV}{T}=$一定」より

$$\frac{p_0V_0}{T_0}=\frac{p_1\cdot\frac{1}{2}V_0}{T_1}$$

よって

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{p_1}{p_0}T_0=\frac{1}{2}\times2^{\frac{5}{3}}\times T_0=\boldsymbol{2^{\frac{2}{3}}T_0}$$

気体定数を R とする。熱力学第一法則「$\varDelta U=Q+W$」，単原子分子理想気体の内部エネルギーの変化の式「$\varDelta U=\dfrac{3}{2}nR\varDelta T$」より，断熱変化なので $Q=0$ であることに留意して

$$\varDelta U=0-W_1$$

$$W_1=-\varDelta U=-\frac{3}{2}\times1\times R\varDelta T=-\frac{3}{2}R(T_1-T_0)=-\frac{3}{2}RT_0\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)\quad\cdots\cdots①$$

ここで，理想気体の状態方程式「$pV=nRT$」より

$$RT_0=p_0V_0\quad\cdots\cdots②$$

① 式に ② 式を代入して

$$W_1=\boldsymbol{-\frac{3}{2}\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)p_0V_0}$$

(2)　定積変化であることから $\varDelta V=0$ であり，$W_2=\boldsymbol{0}$ となる。

また，断熱材に囲まれているので部屋とシリンダー内の気体を 1 つの系とみなした場合，断熱変化となる。よって，熱力学第一法則より $\varDelta U=0$ となり部屋とシリンダー内の気体の内部エネルギーの和は保存する。ゆえに

$$\frac{3}{2}nRT_0+\frac{3}{2}\times1\times RT_1=\frac{3}{2}(n+1)RT_2$$

したがって

$$T_2=\frac{1}{n+1}(nT_0+T_1)=\frac{1}{n+1}\left(nT_0+2^{\frac{2}{3}}T_0\right)=\boldsymbol{\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}T_0}\quad\cdots\cdots③$$

また，体積が変化していないので，ボイル・シャルルの法則において $\dfrac{p}{T}=$一定 が成りたつ。よって

$$p_2=p_1\frac{T_2}{T_1}=2^{\frac{5}{3}}p_0\frac{\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}T_0}{2^{\frac{2}{3}}T_0}=\boldsymbol{\frac{2n+2^{\frac{5}{3}}}{n+1}p_0}$$

(3)　(1) と同様の流れで考える。断熱変化なので

$$p_3{V_0}^{\frac{5}{3}}=p_2\left(\frac{1}{2}V_0\right)^{\frac{5}{3}}\quad\cdots\cdots④$$

よって

$$p_3=\frac{2n+2^{\frac{5}{3}}}{n+1}p_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}=\boldsymbol{\frac{2^{-\frac{2}{3}}n+1}{n+1}p_0}$$

また，ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{p_3V_0}{T_3}=\frac{p_2\cdot\frac{1}{2}V_0}{T_2}\quad\cdots\cdots⑤$$

よって

$$T_3=2\frac{p_3}{p_2}T_2=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}\times\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}T_0=\boldsymbol{\frac{2^{-\frac{2}{3}}n+1}{n+1}T_0}\quad\cdots\cdots⑥$$

一方，熱力学第一法則と単原子分子理想気体の内部エネルギーの変化の式より

$$W_3=-\varDelta U=-\frac{3}{2}\times1\times R(T_3-T_2)=-\frac{3}{2}R(T_3-T_2)$$

$$=-\frac{3}{2}R\left(\frac{2^{-\frac{2}{3}}n+1}{n+1}T_0-\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}T_0\right)=-\frac{3}{2}RT_0\frac{2^{-\frac{2}{3}}n+1-n-2^{\frac{2}{3}}}{n+1}$$

$$=-\frac{3}{2}RT_0\frac{2^{-\frac{2}{3}}n\left(1-2^{\frac{2}{3}}\right)+\left(1-2^{\frac{2}{3}}\right)}{n+1}\quad=-\frac{3}{2}RT_0\frac{\left(1-2^{\frac{2}{3}}\right)\left(2^{-\frac{2}{3}}n+1\right)}{n+1}$$

$$=\frac{3}{2}RT_0\frac{\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)\left(2^{-\frac{2}{3}}n+1\right)}{n+1}\quad\cdots\cdots⑦$$

⑦ 式に ② 式を代入して整理すると

$$W_3=\boldsymbol{\frac{3\left(2^{\frac{2}{3}}-1\right)\left(2^{-\frac{2}{3}}n+1\right)}{2(n+1)}p_0V_0}$$

(4)　$2^{\frac{2}{3}}>1$ であるので，③ 式より $T_2>T_0$ となる。また，③ 式と (1) で求めた T_1 より

$$T_2=\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}T_0=\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{n+1}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}T_1=\frac{n+2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}n+2^{\frac{2}{3}}}T_1$$

この式で $n<2^{\frac{2}{3}}n$ であるので $T_2<T_1$ となる。

一方，⑥ 式より $T_3<T_0$ である。

ゆえに　$\boldsymbol{T_3<T_0<T_2<T_1}$

(5)　気体の状態変化の概略は図 a のようになる。

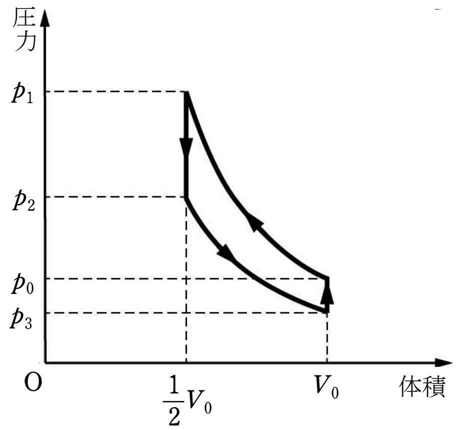


図 a

(6)　シリンダー内の気体は，1 サイクルで初めの状態にもどっている。よって $\boldsymbol{T_1'=T_1}$ となる。

一方，部屋の温度が T_2 であることに留意して (2) と同様に内部エネルギーの保存を考えると

$$\frac{3}{2}nRT_2+\frac{3}{2}\times 1\times RT_1=\frac{3}{2}(n+1)RT_2'$$

また，$T_2<T_1$ であるから

$$\frac{3}{2}nRT_2+\frac{3}{2}\times 1\times RT_1>\frac{3}{2}(n+1)RT_2$$

が成りたつ。よって $\boldsymbol{T_2'>T_2}$ となる。

また，2 回目の (2), (3) の操作後のシリンダー内の気体の圧力をそれぞれ p_2'，p_3' とすると，(3) と同様にして

$$p_3'V_0^{\frac{5}{3}}=p_2'\left(\frac{1}{2}V_0\right)^{\frac{5}{3}} \quad \cdots\cdots ⑧$$

$$\frac{p_3'V_0}{T_3'}=\frac{p_2'\cdot\frac{1}{2}V_0}{T_2'} \quad \cdots\cdots ⑨$$

が成りたつ。④ 式と ⑧ 式より

$$\frac{p_3'}{p_2'}=\frac{p_3}{p_2} \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑤ 式と ⑨ 式より

$$\frac{p_3}{p_2}\cdot\frac{T_2}{T_3}=\frac{p_3'}{p_2'}\cdot\frac{T_2'}{T_3'} \quad \cdots\cdots ⑪$$

⑪ 式に ⑩ 式を代入して

$$\frac{T_2}{T_3}=\frac{T_2'}{T_3'}$$

$T_2'>T_2$ であるので $\boldsymbol{T_3'>T_3}$ となる。

(7)　(6) の結果より，1 サイクル毎に部屋の気体の温度は上昇していき，シリンダー内の気体は $\boldsymbol{T_1}$ を保つ。よって，部屋の気体の温度が $\boldsymbol{T_1}$ になったとき熱の移動は行われない。ゆえに，一連の操作をくり返すと部屋の気体の温度が $\boldsymbol{T_1=2^{\frac{2}{3}}T_0}$ に近づいていく。