１．

図１のように，一辺の長さ L の立方体の容器があり，気体が入っている。この容器は１つの壁Ａを x 軸にそって動かすことが可能である。気体分子を質量 m の小球として取り扱い，壁に対して気体分子はすべて弾性衝突するとして，次の問いに答えよ。

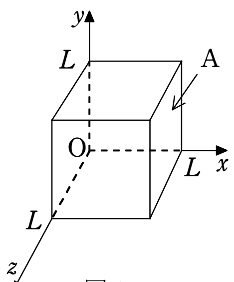

図１

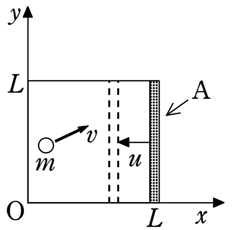

図２

(1)　気体分子１個が x 方向の速度成分 v_x をもっており，壁Ａに１回衝突した。衝突により壁Ａが受けた力積を求めよ。

(2)　気体分子１個は単位時間当たり何回壁Ａに衝突するか答えよ。

次に，図２のように，ごく短い時間 τ の間，壁Ａが速さ u で x の負の方向に移動し，容器は断熱圧縮した。

(3)　移動する壁Ａに気体分子が速度の x 成分 v_x で衝突し，速度の x 成分 v_x' ではねかえされた。v_x' の大きさを求めよ。

(4)　１回当たりの衝突での，気体分子の運動エネルギーの増加分を求めよ。

(5)　壁Ａの移動の速さ u が v_x に比べて十分小さく，τ もごく短いとき，$1+\dfrac{u}{v_x}\fallingdotseq 1$ などのように近似してもよい。また壁Ａに気体分子が衝突する回数は，壁Ａが動いていない場合と同じであると取り扱ってよい。このとき，時間 τ で増加するエネルギー $\varDelta E$ を求めよ。

(6)　m，v_x，もとの気体の体積 V およびその変化分 $\varDelta V$ を用いて，$\varDelta E$ を表せ。

(7)　容器内のすべての気体分子について，速さ v と速度成分の２乗の平均を順に，$\overline{v^2}$，$\overline{v_x{}^2}$，$\overline{v_y{}^2}$，$\overline{v_z{}^2}$ とすると，これらの間には $\overline{v^2}=\overline{v_x{}^2}+\overline{v_y{}^2}+\overline{v_z{}^2}$ という関係が成りたつ。V，$\varDelta V$ および気体分子の運動エネルギー $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ の平均 $\overline{E}$ を用いて，エネルギーの増加分 $\varDelta E$ の平均 $\overline{\varDelta E}$ を求めよ。

(8)　希薄な気体では，絶対温度 T，定数 c を使って $\overline{E}=cT$ とできる。$\overline{E}$ の変化分を $\overline{\varDelta E}$ とすることにより，上昇温度 $\varDelta T$ を求めよ。

解答　(1)　$2mv_x$　　(2)　$\dfrac{v_x}{2L}$　　(3)　v_x+2u　　(4)　$2mu(v_x+u)$　　(5)　$\dfrac{muv_x{}^2\tau}{L}$

(6)　$-mv_x{}^2\dfrac{\varDelta V}{V}$　　(7)　$-\dfrac{2}{3}\overline{E}\dfrac{\varDelta V}{V}$　　(8)　$-\dfrac{2T}{3}\dfrac{\varDelta V}{V}$

解説

(1)　気体分子１個の運動量変化は

$$-mv_x-mv_x=-2mv_x$$

これは気体分子１個が壁Ａから受ける力積に等しい。よって，作用・反作用の法則より，壁Ａが受けた力積は，$\boldsymbol{2mv_x}$ となる。

(2)　気体分子が壁Ａに衝突して，次に衝突するまでの時間を T とする。この間の x 方向の移動距離は $2L$ であるので，等速直線運動の式「$x=vt$」より

$$2L=v_xT$$

よって　$T=\dfrac{2L}{v_x}$

ゆえに，単位時間当たりに衝突する回数は

$$\boldsymbol{\frac{1}{T}=\frac{v_x}{2L}}$$

(3)　壁Ａは速さ u で x の負の方向に運動しているので，壁Ａの速度の x 成分は $-u$ である。よって，反発係数の式「$e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$$1=-\frac{v_x'-(-u)}{v_x-(-u)}$$

$$v_x+u=-v_x'-u$$

$$v_x'=-v_x-2u$$

ゆえに，v_x' の大きさは

$$|v_x'|=\boldsymbol{v_x+2u}$$

(4)　運動エネルギーの式「$K=\dfrac{1}{2}mv^2$」より

$$\frac{1}{2}m(v_x+2u)^2-\frac{1}{2}mv_x{}^2=\frac{m}{2}\{(v_x{}^2+4uv_x+4u^2)-v_x{}^2\}=\boldsymbol{2mu(v_x+u)}$$

(5)　(2)の結果より，時間 τ の間で衝突する回数は

$$\frac{v_x}{2L}\cdot\tau=\frac{v_x\tau}{2L}$$

これと(4)の結果を用いて

$$\varDelta E=2mu(v_x+u)\cdot\frac{v_x\tau}{2L}=\frac{muv_x\tau}{L}(v_x+u)=\frac{muv_x{}^2\tau}{L}\left(1+\frac{u}{v_x}\right)\fallingdotseq\boldsymbol{\frac{muv_x{}^2\tau}{L}}$$

(6)　$V=L^3$ である。また，$\varDelta V<0$ であることに注意すると $\varDelta V=-u\tau L^2$ となるので

$$\frac{u\tau}{L}=-\frac{\Delta V}{V}$$

よって，(5) の結果を用いて

$$\Delta E=mv_x{}^2\cdot\frac{u\tau}{L}=mv_x{}^2\cdot\left(-\frac{\Delta V}{V}\right)=-mv_x{}^2\frac{\Delta V}{V}$$

(7)　分子の数はきわめて大きく，すべての分子は方向にかかわりなく不規則に運動していると考えてよい。すなわち

$$\overline{v_x{}^2}=\overline{v_y{}^2}=\overline{v_z{}^2}$$

が成りたつので $\overline{v^2}=3\overline{v_x{}^2}$ となる。

よって　$\overline{E}=\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}m\overline{v_x{}^2}$

ゆえに　$m\overline{v_x{}^2}=\dfrac{2}{3}\overline{E}$

以上より　$\overline{\Delta E}=-m\overline{v_x{}^2}\dfrac{\Delta V}{V}=-\dfrac{2}{3}\overline{E}\dfrac{\Delta V}{V}$

(8)　$\overline{E}=cT$ より，$\overline{\Delta E}=c\Delta T$ となる。よって，(7) の結果から

$$c\Delta T=-\frac{2}{3}\overline{E}\frac{\Delta V}{V}=-\frac{2cT}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

ゆえに　$\Delta T=-\dfrac{2T}{3}\dfrac{\Delta V}{V}$

２．

図１のような半径 r の変形しない球形容器の中に，1 mol の単原子分子からなる理想気体が入っている。気体分子は容器の内壁と弾性衝突を行い，気体分子どうしの衝突はないものとする。また，容器の内壁はなめらかであり，気体分子に対する重力の影響は無視できるものとする。弾性衝突する各気体分子は球の中心を含むそれぞれの平面内を，図２のように運動する。以下，球形容器の中の気体分子の圧力，温度ならびに内部エネルギーを考える。アボガドロ定数を N_A，気体定数を R とする。円周率を π とする。

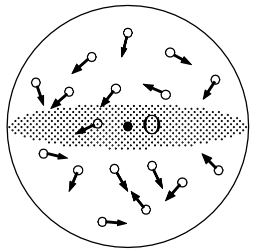

図１

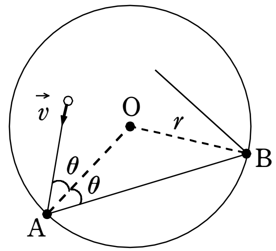

図２

〔A〕　図２のように，質量 m の１個の分子が速度 $\vec{v}$ (大きさ v) で，内壁上の点 A において，球の中心 O と結ばれた線分 OA と θ の角をなして衝突する。その後，内壁上の点 B で２回目の衝突をした後，同様の衝突をくり返すとする。次の問いに答えよ。なお，r，m，v，θ の中から必要な記号を用いて表せ。

(1)　点 A での衝突で，分子が内壁に与える力積の大きさを求めよ。

(2)　１回目と２回目の衝突の間に分子が移動した距離を求めよ。

(3)　単位時間当たりにこの分子が衝突する回数を求めよ。

(4)　球形容器の内壁がこの１個の分子から単位時間当たりに受ける力積の大きさを求めよ。

〔B〕　次に 1 mol の分子の場合を考える。すべての分子についても図１のような球形容器との衝突を考えればよい。しかし，実際には，速度 $\vec{v}$ の大きさや向きは分子によって異なるので，1 mol の分子について考えるときは，v^2 を平均値 $\overline{v^2}$ で置き換える必要がある。次の問いに答えよ。

(5)　(4) で与えられた単位時間当たりの力積をすべての分子について足し合わせたものは，内壁が受ける力の大きさの総和になる。これを球形容器の内壁の面積で割ることで圧力 p が求められる。圧力 p を r，m，N_A，$\overline{v^2}$，π の中から必要な記号を用いて求めよ。

(6)　理想気体の状態方程式を用いることにより，気体分子１個当たりの平均運動エネルギー $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ を絶対温度 T を含んだ式で表せ。r，N_A，R，T，π の中から必要な記号を用いて表せ。

(7)　球形容器中の理想気体の内部エネルギー U を求めよ。r，N_A，R，T，π の中から

必要な記号を用いて表せ。

〔C〕 (7) まで考えてきた球形容器中の 1 mol の理想気体に熱量 Q を加えた場合を考える。

(8) 理想気体の圧力変化 Δp を求めよ。なお，r，N_A，R，Q，π の中から必要な記号を用いて表せ。ただし，熱は容器から外へ移動しないものとする。

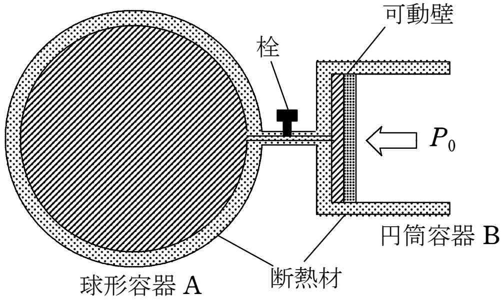

図 3

次に図 3 のように，1 mol の単原子分子からなる理想気体が閉じ込められた体積不変の球形容器 A を円筒容器 B と栓のついた細い管を介してつなげた。

〔D〕 栓が閉じた状態での球形容器の中の圧力は P であり，容器 B の可動壁 (断面積 S) の左側には気体は存在しない。栓を徐々に開けていくと，容器 B の中の可動壁がゆっくり右側に移動し，ある所で静止した。容器 B の可動壁は右側より大気圧 P_0 で押されており，常に容器 B の中の気体の圧力とつりあっているものとする。球形容器 A の容積を V として，容器 B の中を可動壁が移動した距離を L とする。ただし，容器 B の可動壁は，容器 B の円筒の内壁と垂直であり，内壁にそってなめらかに動くものとする。また，可動壁を含む装置全体は断熱材でおおわれており，外部との熱のやり取りはないものとする。容器 A と容器 B の間の細い管の容積はないものとする。

(9) 気体の絶対温度の変化量 (可動壁が移動し静止した後の気体の絶対温度と移動前の気体の絶対温度の差) を，P_0，S，L，R を用いて表せ。

(10) 容器 B の中を可動壁が移動した距離 L を P，P_0，S，V を用いて表せ。

解答 〔A〕 (1) $2mv\cos\theta$ (2) $2r\cos\theta$ (3) $\dfrac{v}{2r\cos\theta}$〔回〕 (4) $\dfrac{mv^2}{r}$

〔B〕 (5) $\dfrac{N_A m\overline{v^2}}{4\pi r^3}$ (6) $\dfrac{3RT}{2N_A}$ (7) $\dfrac{3}{2}RT$ 〔C〕 (8) $\dfrac{Q}{2\pi r^3}$

〔D〕 (9) $-\dfrac{2P_0SL}{3R}$ (10) $\dfrac{3(P-P_0)V}{5P_0S}$

解説

〔A〕(1) 点 A に衝突する直前・直後における運動量ベクトルを始点をそろえてかくと，図 a のようになる。図 a のように，気体分子の運動量の変化の大きさは $2mv\cos\theta$ となる。

これは，気体分子が壁から受けた力積の大きさに等しく，作用反作用の法則から分子が内壁に与える力積の大きさに等しい。よって **$2mv\cos\theta$**

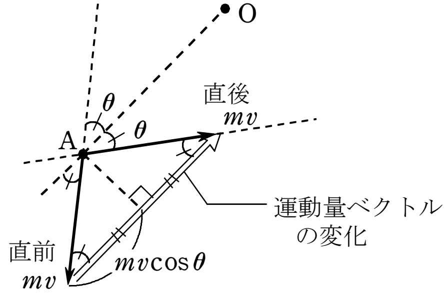

図 a

(2) △OAB が二等辺三角形であることから (図 b)，AB 間の距離を求めると AB $= 2r\cos\theta$

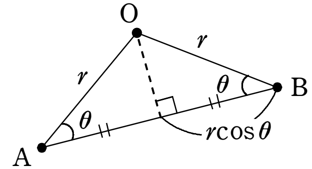

図 b

(3) 1 回目と 2 回目の衝突の間にかかる時間は，速さ v で AB 間を進むので $\dfrac{\text{AB}}{v}$ である。

よって，単位時間では

$$\frac{1}{\frac{\text{AB}}{v}} = \frac{v}{\text{AB}} = \frac{v}{2r\cos\theta}\text{〔回〕}$$

(4) 1 回の衝突で $2mv\cos\theta$ の力積を受けるので，$\dfrac{v}{2r\cos\theta}$〔回〕では

$$2mv\cos\theta \times \frac{v}{2r\cos\theta} = \frac{mv^2}{r}$$

〔B〕(5) (4) より，すべての分子が内壁に与える単位時間当たりの力積の平均値は $\dfrac{m\overline{v^2}}{r}$ である。内壁が受ける単位時間当たりの力積の大きさの値は，内壁が受ける力の大きさの値に等しい (力積 $F\Delta t$ の $\Delta t=1$ の場合である) から，これを N_A 倍すると 1 mol の分子が内壁に及ぼす力の大きさが得られる。よって $N_A\dfrac{m\overline{v^2}}{r}$

これを半径 r の球形容器の内壁の面積 $4\pi r^2$ でわると

$$p = \frac{N_A\frac{m\overline{v^2}}{r}}{4\pi r^2} = \frac{N_A m\overline{v^2}}{4\pi r^3}$$

(6) 球形容器の体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であるから，気体の状態方程式は

$$\frac{N_A m\overline{v^2}}{4\pi r^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 1 \times RT$$

よって　$\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3RT}{2N_A}$

(7)　単原子分子理想気体 1 mol の内部エネルギーは，分子 N_A 個分の運動エネルギーであるから　$U=N_A\times\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}=\dfrac{3}{2}RT$

〔C〕(8)　定積変化であるから，体積が V_1 で一定であるとし，圧力が $\varDelta p$ 変化したとき温度が $\varDelta T$ 変化するとすれば，状態方程式より　$pV_1=1\times RT$，

$(p+\varDelta p)V_1=1\times R(T+\varDelta T)$　なので

$$\varDelta p=\frac{R}{V_1}\varDelta T \quad \cdots\cdots ①$$

一方，定積変化で気体は仕事をしないため，内部エネルギーの変化を $\varDelta U$ とすれば，熱力学第一法則より　$\varDelta U=Q$

(7) より　$\varDelta U=\dfrac{3}{2}R\varDelta T$ となるから

$$Q=\frac{3}{2}R\varDelta T \quad \cdots\cdots ②$$

①，② 式より

$$\varDelta p=\frac{R}{\frac{4}{3}\pi r^3}\times\frac{2Q}{3R}=\frac{Q}{2\pi r^3}$$

〔D〕(9)　容器 B 内の気体は大気圧 P_0 に抗して，外部に P_0SL の仕事をする。外部との熱のやり取りはないため，絶対温度の変化を $\varDelta T$ とすれば，熱力学第一法則「$\varDelta U=Q+W$」から

$$\frac{3}{2}R\varDelta T=0-P_0SL$$

よって　$\varDelta T=-\dfrac{2P_0SL}{3R}$

(10)　可動壁が移動する前の絶対温度を T として，移動の前後でそれぞれ気体の状態方程式を立てると

$PV=RT$

$P_0(V+SL)=R(T+\varDelta T)$

ここで (9) の結果を用いると

$$P_0(V+SL)=RT+R\varDelta T=PV-\frac{2}{3}P_0SL$$

となり　$P_0V+P_0SL=PV-\dfrac{2}{3}P_0SL$

よって　$\dfrac{5}{3}P_0SL=(P-P_0)V$

ゆえに　$L=\dfrac{3(P-P_0)V}{5P_0S}$