1．

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式か値を，それぞれ記入せよ。また，問1，問2では，指定に従って，解答をそれぞれ記入せよ。

気体が外部と熱のやりとりをすることなく行う状態変化を，断熱変化という。以下では，断熱変化を気体の分子運動および熱機関のサイクルから考えてみる。なお，気体は単原子分子理想気体とする。

(1)　断熱変化を気体の分子運動から考察するため，図1に示すように，周囲から断熱されたシリンダー内に気体が封入されている場合を考える。ピストンはなめらかで摩擦は生じないものとする。ここで，シリンダー内の断面積は S，シリンダー内の初期長さは L，初期体積は $V=SL$ である。シリンダー内には質量 m の分子が多数存在し，運動している。

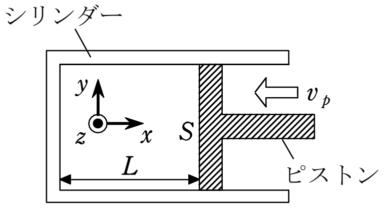


図1

分子と完全弾性衝突するような平板でできたピストンを，速さ v_p で左向きに動かし，中の気体を圧縮する場合を考える。ここでは，分子とピストンは完全弾性衝突と仮定することにより，ピストンから気体に加えた仕事がすべて気体内の運動エネルギー(＝内部エネルギー)に変換されることで，断熱条件に相当すると考える。なお，分子はピストンに比べはるかに大きい速さで運動しているとし，以下で考察する微小時間 Δt の間にピストンが移動する距離は初期のシリンダー長 L に比べて十分小さいものとする。また，必要ならば，a を任意の実数とするとき，絶対値が1より十分小さな実数 δ ($|\delta| \ll 1$) に対し，$(1+\delta)^a \fallingdotseq 1+a\delta$ が成りたつとしてよい。

ここで1個の分子に注目しよう。この分子は x，y，z 方向にそれぞれ速さ v_x，v_y，v_z で運動しており，初期状態では，それらは等しいとする。ピストンが静止しているときは，分子がピストンに衝突しても，分子の x 方向の速さ(絶対値)は変わらない。しかし，ピストンが速さ v_p で移動している場合，分子がピストンと1回衝突すると，分子の x 方向の速さは $\Delta v_x = 2v_p$ だけ増加する。したがって，1回の衝突で運動エネルギー e は，$\Delta v_x \ll v_x$ であることに注意すると，$\Delta e = \boxed{\text{ア}}$ だけ増加すると近似できる。この1個の分子の x 方向の運動について微小時間 Δt を考えると，衝突回数 n は $\boxed{\text{イ}}$ (分子の速さは初期の値 v_x のままであると近似してよい)となる。したがって，n 回の衝突により1個の分子のエネルギー増加量 Δe_n は，(ア)の n 倍になると近似的に考えると $\Delta e_n = \boxed{\text{ウ}} \times m{v_x}^2$ となる。ここで，Δt の間にピストンが左側に移動する距離を $-\Delta L$ (ΔL はピストンの変位で，この場合負の値であることに注意せよ)とすると，(ウ)から v_p を消去して $\Delta e_n = \boxed{\text{エ}}$ と表すことができる。

以下では，上記の分子の運動が気体を構成する全分子の平均的な状態を表していると単純化して考えよう。この場合，初期状態の1個の分子の運動エネルギー e は x，y，z の運動エネルギーをあわせて $e = \boxed{\text{オ}} \times m{v_x}^2$ と表され，系の温度 T はボルツマン定数 k を用いて $T = \boxed{\text{カ}} \times m{v_x}^2$ となる。これに対し，n 回のピストンとの衝突で増加した x 方向の運動エネルギー Δe_n が，引き続く分子間の衝突でどの方向にも均等になると考えれば，先と同様の考え方から，系の温度変化 ΔT は $\boxed{\text{キ}} \times m{v_x}^2$ となり，ΔT と ΔL の間に $\dfrac{\Delta T}{T} = \boxed{\text{ク}}$ という関係式が得られる。この関係式は，断熱圧縮あるいは断熱膨張に伴って温度が増加あるいは減少することを示している。また，前述のように $V=SL$ の関係があり，S は一定であるので L と V は比例関係にあるものとして，$TV^{\frac{2}{3}} =$ 一定 という関係式が得られる。なお，これを圧力 p と体積 V の関係式で書きかえると $p \times \boxed{\text{ケ}} =$ 一定 となる。

(2)　断熱変化を含む熱機関のサイクルを考える。熱機関のサイクルの装置には，単原子分子理想気体が 1 mol 入っており，摩擦は生じないものとする。気体定数を R とするとき，装置内に入っている気体の定積モル比熱は $\dfrac{3}{2}R$ である。図2に示すように，断熱変化と定積変化からなる熱機関のサイクル①を考える。体積 V_A の状態Aから体積 V_B の状態Bになるまで断熱圧縮した。次に，状態Bから状態Cになるまで定積で加熱したのち，状態Cから状態Dになるまで断熱膨張した。最後に，状態Dから状態Aになるまで定積で放熱した。

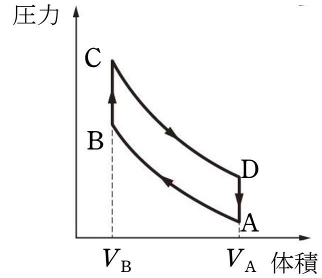


図2

状態Aの温度を T_A，状態Bの温度を T_B，状態Cの温度を T_C ($T_C > T_B$)，状態Dの温度を T_D ($T_D > T_A$) とすると，1サイクルにおいて，気体が外部から吸収した熱量は $\boxed{\text{コ}}$ であり，気体が外部に放出した熱量は $\boxed{\text{サ}}$ となる。したがって，このサイクルの熱効率は $\boxed{\text{シ}}$ となる。理想気体の断熱変化では，分子運動モデルで示したように，$TV^{\frac{2}{3}} =$ 一定 である。この関係式を用いると，体積の比 $\dfrac{V_A}{V_B}$ を ε ($\varepsilon > 1$) とした場合のサイクル①の熱効率は $\boxed{\text{ス}}$ となり，このサイクルの熱効率は体積比のみに依存することがわかる。

次に，熱機関のサイクルにおける断熱変化と等温変化の相違について考えてみる。図２で考えたサイクル ① に対し，次の 1. と 2. のような変化を伴うサイクル ② を考える (状態 A および状態 C はそのままである)。

1. 状態 A から等温圧縮で状態 B′ となり，その後，定積加熱で状態 C に至る
2. 状態 C から等温膨張で状態 D′ となり，その後，定積放熱で状態 A に至る

問１　図２にサイクル ② の状態変化を破線で図示せよ。ただし，両者が重なるところは実線とせよ。なお，状態 B と状態 B′ および状態 D と状態 D′ の違いがわかるように図示すること。また，サイクル ① とサイクル ② で，気体が外部にする仕事はどちらが大きいかを，図を使って説明せよ。

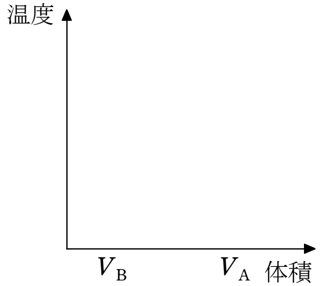


図３

問２　図３にサイクル ① の状態変化を実線で，サイクル ② の状態変化を破線で図示せよ。ただし，両者が重なるところは実線とせよ。なお，状態 B と状態 B′ および状態 D と状態 D′ の違いがわかるように図示すること。

解答　(1)　(ア)　$2mv_xv_p$　　(イ)　$\dfrac{v_x\Delta t}{2L}$　　(ウ)　$\dfrac{v_p}{L}\Delta t$　　(エ)　$-\dfrac{\Delta L}{L}mv_x{}^2$

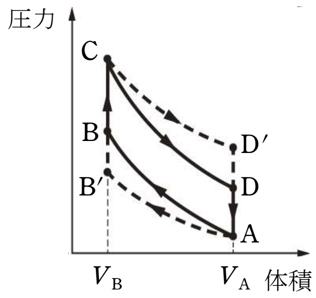
(オ)　$\dfrac{3}{2}$　　(カ)　$\dfrac{1}{k}$　　(キ)　$-\dfrac{2\Delta L}{3kL}$　　(ク)　$-\dfrac{2\Delta L}{3L}$　　(ケ)　$V^{\frac{5}{3}}$

(2)　(コ)　$\dfrac{3}{2}R(T_C-T_B)$　　(サ)　$\dfrac{3}{2}R(T_D-T_A)$　　(シ)　$1-\dfrac{T_D-T_A}{T_C-T_B}$

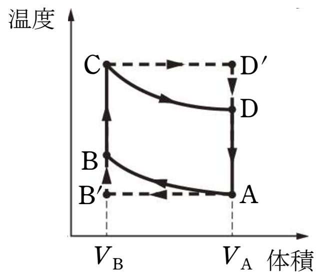
(ス)　$1-\varepsilon^{-\frac{2}{3}}$

問１　図ａ，気体が外部にする仕事はこのサイクルの内側の面積に等しいので，サイクル ② のほうが大きくなる。

問２　図ｂ



図ａ



図ｂ

解説

(1)　(ア)　運動エネルギーの式「$K=\dfrac{1}{2}mv^2$」より

$$\Delta e=\frac{1}{2}m\{(v_x+\Delta v_x)^2+v_y{}^2+v_z{}^2\}-\frac{1}{2}m(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)$$
$$=\frac{1}{2}mv_x{}^2\left\{\left(1+\frac{\Delta v_x}{v_x}\right)^2-1\right\}$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{2}mv_x{}^2\left(1+\frac{2\Delta v_x}{v_x}-1\right)=\frac{1}{2}mv_x{}^2\cdot\frac{4v_p}{v_x}$$
$$=\boldsymbol{2mv_xv_p}$$

(イ)　時間 Δt の間の移動距離は $v_x\Delta t$ であり，衝突と衝突の間の移動距離が $2L$ であるので

$$n=\boldsymbol{\frac{v_x\Delta t}{2L}}$$

(ウ)　(ア)，(イ) の結果を用いると

$$\Delta e_n=n\Delta e=\frac{v_x\Delta t}{2L}\times 2mv_xv_p$$
$$=\boldsymbol{\frac{v_p}{L}\Delta t}\times mv_x{}^2$$

(エ)　ピストンの速さが v_p であることから

$$v_p\Delta t=-\Delta L$$

が成りたつ。よって　$\Delta e_n=\boldsymbol{-\dfrac{\Delta L}{L}mv_x{}^2}$

(オ)　初期状態で　$v_x=v_y=v_z$　であることから

$$e=\frac{1}{2}m(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\times mv_x{}^2$$

(カ)　系の温度 T と分子の運動エネルギー e との関係は，ボルツマン定数 k を用いて

$$e=\frac{3}{2}kT$$

と表せる。よって

$$\frac{3}{2}mv_x{}^2=\frac{3}{2}kT \quad \text{ゆえに} \quad T=\frac{1}{k}\times mv_x{}^2$$

(キ)　(カ) で示した関係より　$\Delta e_n=\frac{3}{2}k\Delta T$

$$-\frac{\Delta L}{L}mv_x{}^2=\frac{3}{2}k\Delta T$$

よって　$\Delta T=-\frac{2\Delta L}{3kL}\times mv_x{}^2$

(ク)　(カ)，(キ) の結果より

$$\frac{\Delta T}{T}=-\frac{2\Delta L}{3kL}\cdot mv_x{}^2\cdot\frac{k}{mv_x{}^2}=-\frac{2\Delta L}{3L}$$

(ケ)　α，β を定数とし，与えられている関係式およびボイル・シャルルの法則

「$\frac{pV}{T}=$一定」より　$TV^{\frac{2}{3}}=\alpha$，$\frac{pV}{T}=\beta$　と表せる。よって

$$p\times V^{\frac{5}{3}}=\alpha\beta=\text{一定}$$

(2)　(コ)　気体が外部から熱を吸収するのは，状態 B → 状態 C のときであり，定積変化である。このとき吸収する熱量を Q_{BC} とおく。定積変化における熱量の式「$Q=nC_V\Delta T$」より

$$Q_{\mathrm{BC}}=1\times\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{C}}-T_{\mathrm{B}})=\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{C}}-T_{\mathrm{B}})$$

(サ)　気体が外部に熱を放出するのは，状態 D → 状態 A のときである。ここで，気体が吸収する熱量を Q_{DA} とおく (実際には，気体は熱を放出するので，Q_{DA} の値は負となる)。(コ) と同様にして

$$Q_{\mathrm{DA}}=1\times\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{A}}-T_{\mathrm{D}})$$

よって，気体が放出した熱量は

$$-Q_{\mathrm{DA}}=-\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{A}}-T_{\mathrm{D}})=\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{D}}-T_{\mathrm{A}})$$

(シ)　熱効率の式「$e=\frac{Q_{\mathrm{in}}-Q_{\mathrm{out}}}{Q_{\mathrm{in}}}$」より

$$e_{\text{効率}}=\frac{\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{C}}-T_{\mathrm{B}})-\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{D}}-T_{\mathrm{A}})}{\frac{3}{2}R(T_{\mathrm{C}}-T_{\mathrm{B}})}$$

$$=1-\frac{T_{\mathrm{D}}-T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{C}}-T_{\mathrm{B}}}$$

(ス)　$TV^{\frac{2}{3}}=$一定 より

$$T_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}{}^{\frac{2}{3}}=T_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{B}}{}^{\frac{2}{3}},\ T_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}}{}^{\frac{2}{3}}=T_{\mathrm{D}}V_{\mathrm{A}}{}^{\frac{2}{3}}$$

が成りたつ。よって

$$\left(\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{A}}}=\frac{T_{\mathrm{C}}}{T_{\mathrm{D}}}=\varepsilon^{\frac{2}{3}}$$

ゆえに　$T_{\mathrm{B}}=T_{\mathrm{A}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}$，$T_{\mathrm{C}}=T_{\mathrm{D}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ となるから

$$e_{\text{効率}}=1-\frac{T_{\mathrm{D}}-T_{\mathrm{A}}}{T_{\mathrm{D}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}-T_{\mathrm{A}}\varepsilon^{\frac{2}{3}}}=1-\varepsilon^{-\frac{2}{3}}$$

問1　等温変化の場合，断熱変化と比べて体積の変化に対する圧力変化が小さくなることに注意すると，図 a のようになる。また，気体が外部にする仕事はこのサイクルの内側の面積に等しいので，サイクル ② のほうが大きくなる。

問2　問1の結果を用いて，サイクル ② に等温圧縮と等温膨張が含まれていることに注意すると，図 b のようになる。

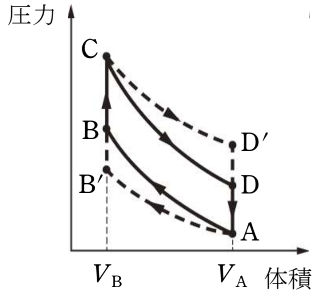


図 a

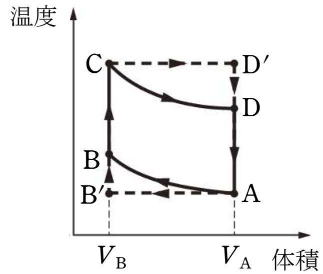


図 b

２．

真空中で，なめらかな水平面上の小球(質量 m) の運動を考える。この小球は，図１のように，円形(半径 a) のなめらかな壁に閉じこめられており，入射角 θ で壁と完全弾性衝突する。次の問いに答えよ。

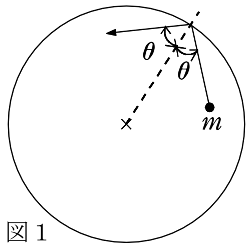


図１

(1)　小球が壁に，速さ v で垂直に衝突する場合(図１で $\theta=0$ の場合) を考える。

(a)　小球が壁から受ける力積の大きさを求めよ。

(b)　衝突直後から次の衝突までにかかる時間を求めよ。

(2)　小球が壁に，速さ v，入射角 $\theta>0$ で衝突する場合を考える。

(a)　小球が壁から受ける力積の大きさを求めよ。

(b)　衝突直後から次の衝突までにかかる時間を求めよ。

(c)　十分長い時間 t の間に小球が壁に衝突する回数を求めよ。

(d)　この時間 t の間に小球が壁から受ける力積の合計を求めよ。

(e)　小球が壁に与える力の大きさの時間平均を求めよ。

次に，多数の小球(質量 m) が，球形(半径 a) のなめらかな容器に閉じこめられている場合を考える。小球は，さまざまな速度であらゆる方向に運動しているが，互いに衝突せず，容器の壁とは完全弾性衝突する。小球の数を N とする。1 つの小球の速度の 2 乗 v^2 の，N 個の小球にわたる平均を $\overline{v^2}$ とする。重力の影響は考えない。次の問いに答えよ。

(3)　1 つの小球に注目すると，それは，どのような初速度の場合も，初速度ベクトルと容器の中心を含む平面上を運動する。その理由を簡単に説明せよ。

(4)　N 個の小球が容器の壁に与える圧力を，$\overline{v^2}$ を用いて表せ。

(5)　この体系を，容器に閉じこめられた絶対温度 T の熱平衡状態にある理想気体とみなす。構成する分子 1 個がもつ平均の運動エネルギー $\dfrac{1}{2}m\overline{v^2}$ を T を用いて表せ。ボルツマン定数を k とする。

図２のように，上記と同じ球形の容器が 2 つあり，左の容器には寸法の大きな分子 A (質量 m_A) からなる気体が，右の容器には寸法の小さな分子 B (質量 m_B) からなる気体が入っている。どちらも理想気体とみなせる。分子は球形とし内部構造や回転は考えない。また，壁と完全弾性衝突する。どちらの容器も体積は V である。各容器に

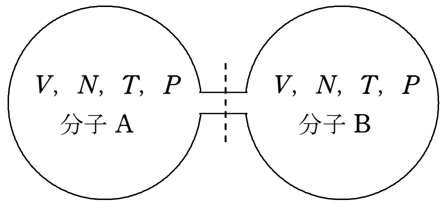


図２

は，それぞれ N 個の分子が入っており，どちらも絶対温度は T，圧力は P である。

この 2 つの容器を，小さな穴が多数開いたフィルターを有するパイプでつなぐ。パイプは小さく体積は無視できる。フィルターの穴は，分子 A の直径より十分小さく，分子 B の直径より十分大きいので，分子 A はパイプを通れないが，分子 B はパイプを自由に通過できる。分子どうしの相互作用は無視できるとして，次の問いに答えよ。

(6) 2 つの容器をこのパイプでつなぎ，十分時間が経過した後を考える。

(a) 分子 A がもつ速度の 2 乗の平均 $\overline{v_A{}^2}$ と，分子 B がもつ速度の 2 乗の平均 $\overline{v_B{}^2}$ の比 $\overline{v_A{}^2}/\overline{v_B{}^2}$ を，m_A と m_B を含む式で表せ。また，そうなる理由を簡単に説明せよ。

(b) 左右それぞれの容器中の絶対温度，分子数，圧力を求めよ。解答は，パイプをつなぐ前の絶対温度 T，分子数 N，圧力 P を用いて表せ。

(7) (6) の状態から，パイプ内のフィルターを取り除き，どちらの分子もパイプを自由に通過できるようにした。十分時間が経過した後での，左右それぞれの容器中の絶対温度，分子数，圧力を求めよ。解答は，パイプをつなぐ前の絶対温度 T，分子数 N，圧力 P を用いて表せ。

解答 (1) (a) $2mv$ (b) $\dfrac{2a}{v}$

(2) (a) $2mv\cos\theta$ (b) $\dfrac{2a\cos\theta}{v}$ (c) $\dfrac{vt}{2a\cos\theta}$ (d) $\dfrac{mv^2t}{a}$

(e) $\dfrac{mv^2}{a}$

(3) 小球が互いに衝突しないことから，小球にはたらく力は壁から受ける力のみである。摩擦はないので壁から受ける力は壁に垂直で必ず容器の中心を向いているので，衝突後の速度ベクトルも，初速度ベクトルと容器の中心を含む平面内に含まれるから。

(4) $\dfrac{Nm\overline{v^2}}{4\pi a^3}$ (5) $\dfrac{3}{2}kT$

(6) (a) $\dfrac{m_B}{m_A}$

2 つの容器の温度は等しいから，(5) より

$$\frac{3}{2}kT=\frac{1}{2}m_A\overline{v_A{}^2}=\frac{1}{2}m_B\overline{v_B{}^2}$$

よって $m_A\overline{v_A{}^2}=m_B\overline{v_B{}^2}$

ゆえに $\dfrac{\overline{v_A{}^2}}{\overline{v_B{}^2}}=\dfrac{m_B}{m_A}$

(b)

	絶対温度	分子数	圧力
左側容器	T	$\dfrac{3N}{2}$	$\dfrac{3P}{2}$
右側容器	T	$\dfrac{N}{2}$	$\dfrac{P}{2}$

(7)

	絶対温度	分子数	圧力
左側容器	T	N	P
右側容器	T	N	P

解説

(1) (a) 図 a のように壁から離れる向きを正とすると，力積は運動量の変化に等しいから

$mv-(-mv)=\mathbf{2mv}$

(b) 直径分の距離を進む時間であるから，時間 t_1 は

$2a=vt_1$ より $t_1=\dfrac{\mathbf{2a}}{\mathbf{v}}$

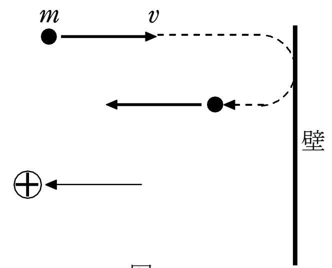


図 a

(2) (a) 衝突によって壁に平行な速度成分は変化せず壁に垂直な成分のみ変化するから力積は

$mv\cos\theta-(-mv\cos\theta)$

$=\mathbf{2mv\cos\theta}$

(b) 次に衝突するまでに進む距離は図 c のように $2a\cos\theta$ であるから，かかる時間 t_2 は

$2a\cos\theta=vt_2$

よって

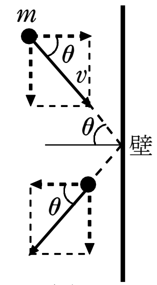


図 b

$$t_2=\frac{2a\cos\theta}{v}$$

(c) 時間 t_2 に 1 回衝突するから，時間 t の間に衝突する回数は

$$\frac{t}{t_2}=\frac{t}{\frac{2a\cos\theta}{v}}$$

$$=\frac{vt}{2a\cos\theta}$$

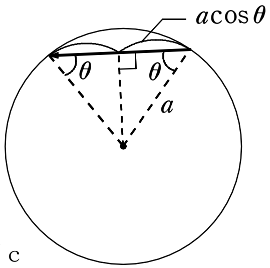


図 c

(d) (a)(c) の結果より，力積の合計は

$$2mv\cos\theta\cdot\frac{vt}{2a\cos\theta}=\frac{mv^2t}{a}$$

(e) 力の大きさを F とすると，力積は Ft であるから，(d) の答えより

$$\frac{\frac{mv^2t}{a}}{t}=\frac{mv^2}{a}$$

(3) 小球が互いに衝突しないことから，小球にはたらく力は壁から受ける力のみである。摩擦はないので壁から受ける力は壁に垂直で必ず容器の中心を向いているので，衝突後の速度ベクトルも，初速度ベクトルと容器の中心を含む平面内に含まれるから。

(4) N 個の小球による力の合計は $N\cdot\frac{m\overline{v^2}}{a}$ であり，容器の壁の面積は $4\pi a^2$ であるから圧力は

$$\frac{N\cdot\frac{m\overline{v^2}}{a}}{4\pi a^2}=\frac{Nm\overline{v^2}}{4\pi a^3}$$

(5) この気体の物質量を n とすると，理想気体の状態方程式「$pV=nRT$」より

$$\frac{Nm\overline{v^2}}{4\pi a^3}\cdot\frac{4\pi a^3}{3}=nRT$$

よって $\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}\times\frac{nR}{N}T$

アボガドロ定数を N_0 とすると $N=nN_0$ であり，またボルツマン定数 $k=\frac{R}{N_0}$ であるから

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$$

(6) (a) 2 つの容器の温度は等しいから，(5) より

$$\frac{3}{2}kT=\frac{1}{2}m_A\overline{v_A{}^2}=\frac{1}{2}m_B\overline{v_B{}^2}$$

よって $m_A\overline{v_A{}^2}=m_B\overline{v_B{}^2}$

ゆえに $\frac{\overline{v_A{}^2}}{\overline{v_B{}^2}}=\frac{m_B}{m_A}$

(b) 分子 A は左側の容器内にのみ存在するので，分子 A が左側容器の壁に及ぼす圧力は P

また分子 B は 2 つの容器全体に均等に広がるので，それぞれの容器内の B の分子数は $\frac{N}{2}$ となりそれによる圧力は $\frac{P}{2}$ となる。

容器の壁にかかる圧力は各分子による圧力の和になるから，左側の容器内の圧力は

$$P+\frac{P}{2}=\frac{3P}{2}$$

また，分子 B が 2 つの容器全体に広がっても分子の速度は変わらず，運動エネルギーも変わらないので，絶対温度も変わらない。

	絶対温度	分子数	圧力
左側容器	T	$\frac{3N}{2}$	$\frac{3P}{2}$
右側容器	T	$\frac{N}{2}$	$\frac{P}{2}$

(7) 分子 A も 2 つの容器全体に均等に広がり，それぞれの容器内の A の分子数は $\frac{N}{2}$ となり，それによる圧力は $\frac{P}{2}$ となる。それぞれの容器内の圧力は分子 A，B による圧力の和で $\frac{P}{2}+\frac{P}{2}=P$ となる。

	絶対温度	分子数	圧力
左側容器	T	N	P
右側容器	T	N	P