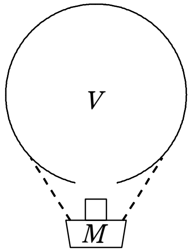
1．

図に示されるような容積 V〔m^3〕の熱気球を，内部の空気を加熱することにより上昇させる。熱気球の下端部では，空気の自由な出入りがあり，外部と内部の圧力は等しい。また，下端部に取りつけられたゴンドラには熱バーナーが備わっている。これら全体から熱気球内にある空気の質量を除いた残りの部分の質量は，M〔kg〕である。熱気球内の空気の温度は，熱バーナーにより制御できる。また容積 V に比べ，他の部分の体積は十分小さいものとする。空気は，理想気体として取り扱ってよい。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。



最初，熱気球は地上に置かれており，熱バーナーははたらいていなかった。地上での大気の絶対温度は T_0〔K〕，大気圧は p_0〔Pa〕，大気の密度は d_0〔kg/m^3〕であった。次の問いに答えよ。

(1)　空気 1 mol の質量を m_A〔kg〕とする。気体定数 R〔J/(mol·K)〕および T_0，p_0，m_A を用いて，d_0 を表せ。

(2)　熱気球が地上で受ける浮力の大きさを，d_0，V，M，g，T_0 のうち必要なものを用いて表せ。

熱気球内の空気を熱バーナーで加熱した。熱気球内の空気の温度は上昇し，絶対温度 T_1〔K〕になったとき，熱気球は今にも地上を離れようとする状態になった。

(3)　絶対温度 T_1 での熱気球内の空気の密度を，d_0，T_0，T_1 で表せ。さらに，T_1 を，d_0，V，M，g，T_0 のうち必要なものを用いて表せ。

大気の温度や圧力が高度により定まる原因にはいくつかが考えられる。ここでは任意の高度での大気の絶対温度 T_A〔K〕および圧力 p_A〔Pa〕が，$T_A=C\cdot(p_A)^{\alpha}$　に従いながら，高度が増すにつれ，それぞれ減少していく場合を考える。ここで C は，地上での大気の絶対温度 T_0，大気圧 p_0 にのみ依存し，$C=\dfrac{T_0}{(p_0)^{\alpha}}$　と書ける。α は $0<\alpha\leqq 1$ を満たす定数である。

熱気球をひもで地上に固定し，熱気球内の空気の温度を T_2〔K〕まで上昇させた。その後，熱気球内の空気の温度を T_2 に保ちつつ地上から解放すると，熱気球は上昇した。最終的に，大気の絶対温度が $T_A{}^*$〔K〕で与えられる高度で，熱気球にはたらく重力と浮力はつりあった。

(4)　このときの熱気球内の空気の密度を，d_0，T_0，T_2，$T_A{}^*$，α を用いて表せ。

(5)　熱気球にはたらく力のつりあいの式を，d_0，V，M，g，T_0，T_2，$T_A{}^*$，α のうち必要なものを用いて表せ。

解答　(1)　$\dfrac{p_0m_A}{RT_0}$〔kg/m^3〕　(2)　d_0Vg〔N〕

(3)　$\dfrac{T_0}{T_1}d_0$〔kg/m^3〕，$\dfrac{d_0V}{d_0V-M}T_0$〔K〕　(4)　$\dfrac{T_0}{T_2}\cdot\left(\dfrac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot d_0$〔kg/m^3〕

(5)　$\left(\dfrac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}d_0Vg=\dfrac{T_0}{T_2}\left(\dfrac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}d_0Vg+Mg$

解説

ヒント　(2)　浮力は，排除した流体（空気）にはたらく重力と等しく「$\rho_{外}Vg$」で表される。

(3)　ボイル・シャルルの関係を密度を用いて表すと「$\dfrac{p_0}{\rho_0T_0}=\dfrac{p}{\rho T}$」である。浮力を含めた力のつりあいを考える。

(4)　与えられた関係式を用いて，大気の圧力 $p_A{}^*$ と温度 $T_A{}^*$ の関係を求め，(1) の密度の式に入れる。

(5)　熱気球にはたらく重力，熱気球内の空気にはたらく重力と浮力とのつりあいを求める。

(1)　1 mol の気体の体積を V_0 とすると，気体の状態方程式は

$$p_0V_0=1\cdot R\cdot T_0$$

よって，密度 $d_0=\dfrac{m_A}{V_0}=\boldsymbol{\dfrac{p_0m_A}{RT_0}}$〔kg/m^3〕

(2)　浮力は，排除した気体にはたらく重力「ρVg」であるから，$\rho=d_0$ より

$\boldsymbol{d_0Vg}$〔N〕

(3)　(1) の結果を用いて　$d_1=\dfrac{p_0m_A}{RT_1}$

よって　$d_1=\dfrac{1}{T_1}\dfrac{p_0m_A}{R}=\boldsymbol{\dfrac{T_0}{T_1}d_0}$〔kg/m^3〕※A←

また，熱気球が地上を離れる直前では，熱気球および熱気球内の空気にはたらく重力と

浮力はつりあっている (図 a)。力のつりあいの式は

$$d_0Vg = d_1Vg + Mg$$

d_1 を代入して　$d_0Vg = \dfrac{T_0}{T_1}d_0Vg + Mg$

よって　$T_1 = \dfrac{\boldsymbol{d_0V}}{\boldsymbol{d_0V - M}}\boldsymbol{T_0}$ 〔K〕

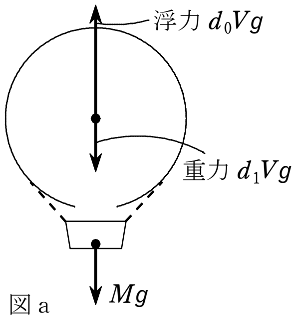


図 a

(4)　大気の絶対温度が $T_A{}^*$〔K〕で与えられる高度での，熱気球内の空気の密度を d_2〔kg/m³〕，圧力を $p_A{}^*$〔Pa〕とする。

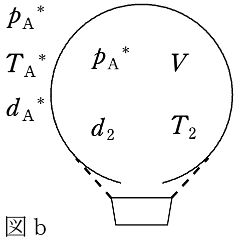


図 b

与式より　$T_A = C\cdot(p_A)^\alpha = \dfrac{T_0}{(p_0)^\alpha}(p_A)^\alpha = \left(\dfrac{p_A}{p_0}\right)^\alpha\cdot T_0$

ゆえに　$\dfrac{p_A}{p_0} = \left(\dfrac{T_A}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$　　よって　$\dfrac{p_A{}^*}{p_0} = \left(\dfrac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

求める密度は，(1) と同様に考えて　$d_2 = \dfrac{p_A{}^*m_A}{RT_2}$

また，(1) より $\dfrac{m_A}{R} = d_0\dfrac{T_0}{p_0}$ だから

$$d_2 = \frac{m_A}{R}\times\frac{p_A{}^*}{T_2} = d_0\frac{T_0}{p_0}\cdot\frac{p_A{}^*}{T_2} = \frac{T_0}{T_2}\frac{p_A{}^*}{p_0}\cdot d_0 = \boldsymbol{\frac{T_0}{T_2}\cdot\left(\frac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot d_0}\ \text{〔kg/m}^3\text{〕}$$

(5)　熱気球の外の大気の密度 $d_A{}^*$ は，(4) と同様に考えて

$$d_A{}^* = \frac{T_0}{T_A{}^*}\cdot\frac{p_A{}^*}{p_0}\cdot d_0 = \frac{T_0}{T_A{}^*}\left(\frac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot d_0 = \left(\frac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}\cdot d_0$$

また，力のつりあいの式は　$d_A{}^*Vg = d_2Vg + Mg$

ゆえに　$\boldsymbol{\left(\dfrac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}d_0Vg = \dfrac{T_0}{T_2}\left(\dfrac{T_A{}^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}d_0Vg + Mg}$

←※A　ボイル・シャルルの法則

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_0}{T_0}$$

を密度 d_1，d_0 で表すと

$$\frac{p_1}{d_1T_1} = \frac{p_0}{d_0T_0}$$

ここで，$p_1 = p_0$ とすれば

$$d_1 = \frac{T_0}{T_1}d_0$$

２．

図 1 のように下方に開放部がある容器が液体の上に配置されており，容器内の上方には理想気体が封入されている。この容器は熱を通し，理想気体，液体および外気の温度は同じであり，当初はセルシウス温度 θ_1 に保たれている。また外気の圧力は常に大気圧 P であるものとする。ここで，容器の断面積を S，重力加速度の大きさを g，液体の密度を ρ とする。容器の変形，厚み，質量，気体の液体への溶解，および液体の蒸発はいずれも無視できるとし，液体の容積は十分大きいとする。また容器の頂部の面は常に水平に保たれている。

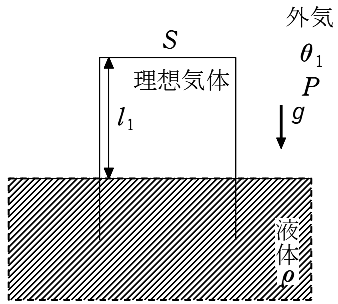


図 1

(1)　理想気体は温度が一定のとき，圧力と体積の積が一定値をとることが知られている。この法則名を答えよ。

(2)　図 1 のように，容器内外の液面の水位が同じ状態では，容器内の気圧は大気圧 P に等しい。このとき，容器内の液面と頂部間の距離は l_1 であった。次に図 2 のように質量 M のおもりを容器の上に静かに置いて十分に時間が経過したとき，容器内の液面と頂部間の距離が l_2 であったとする。このとき (1) の法則を用いることによって，大気圧 P を l_1，l_2，M，g および S で答えよ。

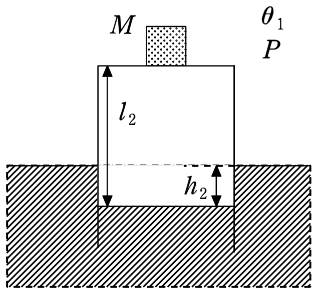


図 2

(3)　図 2 のとき，容器内の液面の高さは外より h_2 だけ低かった。このとき h_2 を M，S および ρ で答えよ。

(4)　次に容器を図 1 の状態からゆっくり上方に引き上げる。図 3 のように容器の頂部と液面間の距離が l_3 になったとき液面の高さは外より h_3 だけ高くなった。再び (1) の法則を用いることによって，h_3 を l_1，l_3，ρ，P および g で答えよ。

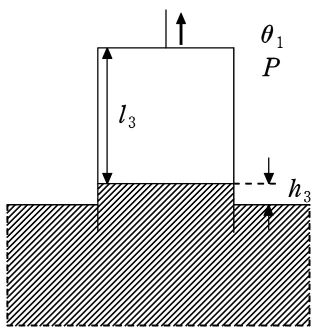


図 3

(5)　理想気体は圧力が一定のとき，体積と絶対温度が比例することが知られている。この法則名を答えよ。

(6)　これまでは外気の温度がセルシウス温度 θ_1 であった。図 2 の状態でおもりを置いたまま，外気の温度を図 4 のようにセルシウス温度 θ_4 に上げて十分に時間を経過させたところ，容器の頂部と液面間の距離は l_4 となった。(5) の法則を考慮し，l_4 は l_2 に比べて大きいか，小さいか，等しいかを答えよ。また，容器内外の液面の高低差 h_4 は h_2 に比べて大きくなるか，小さくなるか，等しいかを答えよ。

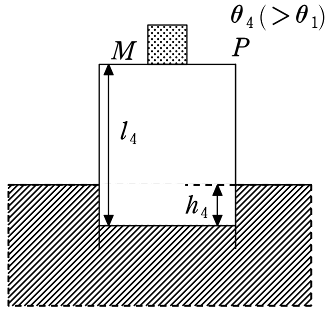


図 4

(7)　絶対零度をセルシウス温度で表した値を θ_0 とする。(5) の法則を用いることによって，θ_0 を l_2，l_4，θ_1 および θ_4 で答えよ。

解答　(1)　ボイルの法則　(2)　$\dfrac{l_2Mg}{S(l_1-l_2)}$　(3)　$\dfrac{M}{\rho S}$　(4)　$\dfrac{P(l_3-l_1)}{\rho g l_3}$

(5)　シャルルの法則　(6)　l_4 は l_2 に比べて大きい。h_4 は h_2 と等しい。

(7)　$\dfrac{l_4\theta_1-l_2\theta_4}{l_4-l_2}$

解説

(1)　**ボイルの法則**

(2)　質量 M のおもりを置いたとき，容器の上面での力のつりあいを考える。図 2 での気体の圧力を P_2 として，

$$Mg+PS=P_2S \quad \cdots\cdots ①$$

また，図 1 と図 2 で，ボイルの法則を用いると

$$PSl_1=P_2Sl_2 \quad \cdots\cdots ②$$

①式を②式に代入して整理すれば

$$PSl_1=(Mg+PS)l_2$$

よって　$P=\boldsymbol{\dfrac{l_2Mg}{S(l_1-l_2)}}$

(3)　液体による圧力は「$P_{液}=\rho gh$」である。ここで，容器内の水面での力のつりあいは

$$P_2S=PS+\rho gh_2S$$

①式を代入して　$Mg+PS=PS+\rho gh_2S$

よって　$h_2=\boldsymbol{\dfrac{M}{\rho S}}$

(4)　図 3 での気体の圧力を P_3 とする。外の液面の高さにおける力のつりあいは

$P_3S+\rho g h_3 S=PS$ ……③

また，図 1 と図 3 でボイルの法則を用いて

$PSl_1=P_3Sl_3$

③式を代入して　$PSl_1=(P-\rho g h_3)Sl_3$

よって　$P(l_3-l_1)=\rho g h_3 l_3$

ゆえに　$h_3=\dfrac{\boldsymbol{P(l_3-l_1)}}{\boldsymbol{\rho g l_3}}$

(5)　**シャルルの法則**

(6)　容器内部の気体の圧力は，(2) で考えたように大気圧とおもりによって決まり，図 2 の P_2 のままである。よって，**h_4 は h_2 と等しい**。また，温度を高くしたから，シャルルの法則より体積は増加している。よって，**l_4 は l_2 に比べて大きい**。

(7)　絶対零度をセルシウス温度で θ_0 とすると，

θ_1 の絶対温度　$T_1=\theta_1-\theta_0$

θ_4 の絶対温度　$T_4=\theta_4-\theta_0$

である。図 2 と図 4 でシャルルの法則を用いて

$$\frac{Sl_2}{T_1}=\frac{Sl_4}{T_4}$$

よって　$\dfrac{l_2}{\theta_1-\theta_0}=\dfrac{l_4}{\theta_4-\theta_0}$

ゆえに　$l_2(\theta_4-\theta_0)=l_4(\theta_1-\theta_0)$

したがって　$\theta_0=\dfrac{\boldsymbol{l_4\theta_1-l_2\theta_4}}{\boldsymbol{l_4-l_2}}$

参考　θ と Sl の関係を図示する。