1．

図1のような材質がゴムでできた風船を考える。この物理現象を簡単に考えるため，風船を次のようなモデルとした。風船は球と考え，コックと吹きこみ口の大きさ，ゴムの厚みは計算上考えない。風船内部の気体の温度は風船外部の気体の温度と同じ温度とする。気体はすべて理想気体と考える。

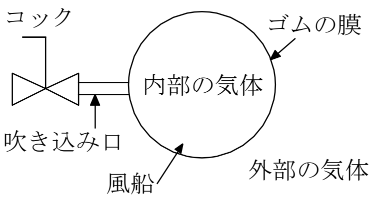


図1　風船モデルの概要

この風船内外の気体の移動は，吹きこみ口を通して起こる。コックが開いているとき，風船内部の気体の圧力が吹きこみ口付近の気体の圧力よりも低い場合は風船内部に気体が移動し，逆の場合は風船内部の気体が吹きこみ口から風船外部に移動する。また，風船内部と吹きこみ口付近の気体の圧力が同じときは気体の移動はない。

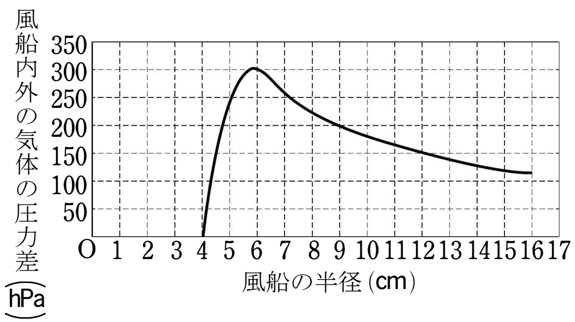


図2　風船の半径と風船内外の気体の圧力差の関係

風船を膨らましていないとき半径は 4.0 cm なのでそれ未満は考えない

風船が膨らんでいるとき，風船内部の気体の圧力はゴムによって内側に押されているので気体の圧力は高くなる。風船内外の気体の圧力差と風船の半径について調べたところ，図2のようになった。この結果は，風船外部の気体の圧力や温度に依存しない。

また，風船の半径が 6.0 cm から 16.0 cm の間は半径 r〔cm〕としたとき，圧力差 Δp〔hPa〕は

$$\Delta p=\frac{1800}{r}$$

に従うものとして考えてよい。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　風船外部の気体の圧力 P_1〔hPa〕，温度 T_1〔K〕の環境で風船の半径 R_1〔cm〕の風船を，コックを閉じたまま風船外部の気体の圧力 P_2〔hPa〕，温度 T_2〔K〕の環境に移動したところ風船の半径が R_2〔cm〕に変化した。このときの風船の半径は 6.0 cm から 16.0 cm の範囲であった。P_1，T_1，R_1，P_2，T_2，R_2 の関係を文字式で表せ。ただし P_1，T_1，R_1 を左辺，P_2，T_2，R_2 を右辺においた文字式とせよ。

(2)　風船外部の圧力 1000 hPa，温度 300 K の環境下で半径 6.0 cm の風船がある。この風船の内部の気体をビニール袋にすべて放出すると，ビニール袋内部の気体の体積は

いくらになるか。有効数字2桁で答えよ。ただし，ビニール袋内の初期の気体の体積は0であるものとし，ビニール袋の内部の気体の圧力，温度は外気と同じになるとする。

(3)　風船外部の圧力 1000 hPa，温度 300 K の環境下で半径 7.0 cm の風船Aと，半径 10.0 cm の同じ種類の風船Bがある。図3のように風船Aと風船Bをコックが閉じられたコック付き管でつなげ，コックを開放したときの物理現象を考える。ただし，コック付き管の大きさはないものとする。次の(ア)，(イ)に答えよ。

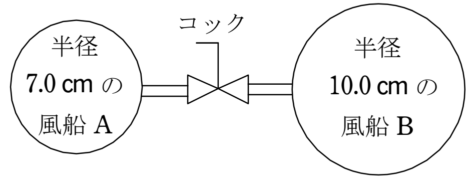


図3　コック付き管でつなげられた2つの風船

(ア)　それぞれの風船が大きくなるか，小さくなるか，変わらないか，また最終的な大きさはそれぞれどうなるか，式や図2のグラフを根拠に理論的に説明せよ。ただし風船の最終的な大きさは厳密な数値を求める必要はなく，(イ)で示されている大まかな範囲がわかればよい。

(イ)　風船A，風船Bの最終的な大きさをそれぞれ，次から選び，①～⑭の記号で答えよ。

①　4.0 cm	②　4.0 cm より大きく 5.0 cm 未満
③　5.0 cm 以上 6.0 cm 未満	④　6.0 cm 以上 7.0 cm 未満
⑤　7.0 cm 以上 8.0 cm 未満	⑥　8.0 cm 以上 9.0 cm 未満
⑦　9.0 cm 以上 10.0 cm 未満	⑧　10.0 cm 以上 11.0 cm 未満
⑨　11.0 cm 以上 12.0 cm 未満	⑩　12.0 cm 以上 13.0 cm 未満
⑪　13.0 cm 以上 14.0 cm 未満	⑫　14.0 cm 以上 15.0 cm 未満
⑬　15.0 cm 以上 16.0 cm 未満	⑭　16.0 cm 以上

解答　(1)　$\dfrac{R_1^{\,2}(P_1R_1+1800)}{T_1}=\dfrac{R_2^{\,2}(P_2R_2+1800)}{T_2}$　　(2)　$1.2\times10^3\ \mathrm{cm}^3$

(3)　(ア)　Aは小さくなり，Bは大きくなる。説明：省略

(イ)　風船A：②　風船B：⑧

解説

(1)　風船内の内部の気体に対して，ボイル・シャルルの法則「$\dfrac{pV}{T}=$一定」を用いると

$$\frac{\left(P_1+\dfrac{1800}{R_1}\right)\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_1^{\,3}}{T_1}=\frac{\left(P_2+\dfrac{1800}{R_2}\right)\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_2^{\,3}}{T_2}$$

よって　$\dfrac{R_1{}^2(P_1R_1+1800)}{T_1}=\dfrac{R_2{}^2(P_2R_2+1800)}{T_2}$

(2)　風船内の圧力は

$$1000+\frac{1800}{6.0}=1300\ \mathrm{hPa}$$

である。ビニール袋の内部の気体の圧力は外部の圧力と等しく，1000 hPa である。よって，ボイルの法則「$pV=$一定」により，求める体積を V〔cm^3〕とおくと

$$1300\times\frac{4}{3}\pi\times6.0^3=1000\times V$$

ゆえに　$V=4\times3.14\times72\times1.3=1175.616$

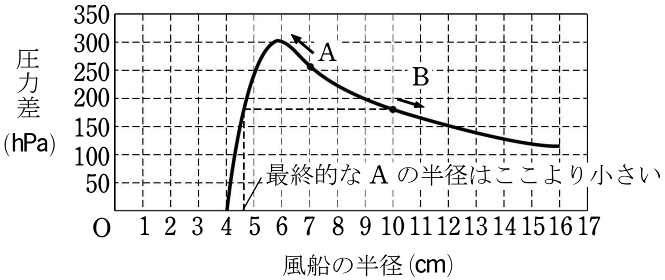
$$\fallingdotseq 1.2\times10^3\ \mathrm{cm}^3$$

(3)(ア)　条件より，風船内の圧力は風船 A，B の半径によって決まり，それぞれ P_A，P_B〔hPa〕とおくと

$$P_\mathrm{A}=1000+\frac{1800}{7.0}\ \mathrm{hPa}$$

$$P_\mathrm{B}=1000+\frac{1800}{10.0}\ \mathrm{hPa}$$

となる。よって $P_\mathrm{A}>P_\mathrm{B}$ を満たすので，グラフの特性から互いの圧力が等しくなるときまで，風船 A から風船 B へ気体が移動する。 ゆえに，**A は小さくなり，B は大きくなる。**



コックを開放後，最終的に風船 A，B の圧力は等しくなる。初期状態から風船は，A は小さくなり，B は大きくなるので B の半径 $r_\mathrm{B}>10$ cm のときの圧力と対応する A の半径は $4.0\ \mathrm{cm}<r_\mathrm{A}<5.0\ \mathrm{cm}$ となる。

また，風船 A，B 内の気体の物質量 n_A，n_B〔mol〕の和はコックの開放前後で変わらない。状態方程式「$pV=nRT$」より初期状態の体積を V_A，V_B，A，B の絶対温度をともに T とすると

$$n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}=\frac{P_\mathrm{A}V_\mathrm{A}}{RT}+\frac{P_\mathrm{B}V_\mathrm{B}}{RT}\ \text{より}$$

$$(n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B})RT=P_\mathrm{A}V_\mathrm{A}+P_\mathrm{B}V_\mathrm{B}$$

ここで $K=(n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B})RT$ とすると

$$K=\left(1000+\frac{1800}{7.0}\right)\times\frac{4}{3}\pi\times(7.0)^3+\left(1000+\frac{1800}{10.0}\right)\times\frac{4}{3}\pi\times(10.0)^3$$

$$\fallingdotseq\frac{4}{3}\pi\times(1.61\times10^6)$$

上記の値に収束するような風船 B の半径 r_B をさがせばよい。

$r_\mathrm{B}=10.0$ cm のとき，図 2 より $r_\mathrm{A}=4.7$ cm，$\varDelta P_\mathrm{A}=\varDelta \mathrm{P}_\mathrm{B}=\dfrac{1800}{10.0}=180$ hPa より

$$K_{10}=(1000+180)\times\frac{4}{3}\pi\times(4.7^3+10.0^3)$$

$$\fallingdotseq\frac{4}{3}\pi\times(1.30\times10^6)<K$$

また，$r_\mathrm{B}=11.0$ cm のとき，図 2 より

$r_\mathrm{A}=4.6$ cm，$\varDelta P_\mathrm{A}=\varDelta P_\mathrm{B}=\dfrac{1800}{11.0}\fallingdotseq164$ hPa より

$$K_{11}=(1000+164)\times\frac{4}{3}\pi\times(4.6^3+11.0^3)$$

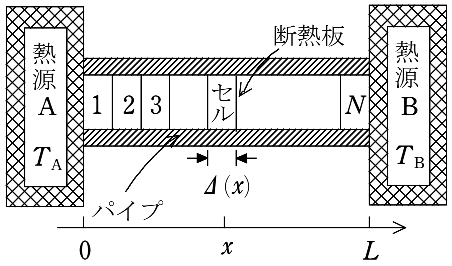
$$\fallingdotseq\frac{4}{3}\pi\times(1.66\times10^6)>K$$

よって　$10.0\ \mathrm{cm}<r_\mathrm{B}<11.0\ \mathrm{cm}$

(イ)　(ア) より，風船 A　…… ②，風船 B　…… ⑧

2．

気体の状態の変化を調べるために，図のような装置を考えよう。長さ L〔m〕の熱をよく伝えるパイプの中空部分（x 軸に垂直な断面積 S〔m^2〕）に，理想気体が n〔mol〕密封されている。パイプの両端は温度 T_A〔K〕と温度 T_B〔K〕の 2 つの熱源に密着している。中空の部分は x 方向に自由に移動できる多数の薄い断熱板によって同数の気体分子を含んだ N 個のセル（小部屋）に区切られている。また位置 x にあるセルの幅 $\Delta(x)$ は十分小さいので，セル内のどこでも気体の温度は同じであり，位置 x のパイプの温度 $T(x)$ に等しいとする。



最初 T_A と T_B は等しく，断熱板は等間隔に並んでいた。次に T_B をゆっくりと上昇させ $T_B=2T_A$ としたところ，パイプには一定の温度勾配ができた。パイプの形状は温度によらないものとして以下の問いに答えよ。

(1)　位置 x におけるパイプの温度 $T(x)$ を T_A，x，L を用いて表せ。

温度勾配ができた結果，断熱板は最初の位置から移動して落ちついた。

(2)　このとき，気体の圧力はどのセルでも同じになっている。この理由を 60 字程度で説明せよ。

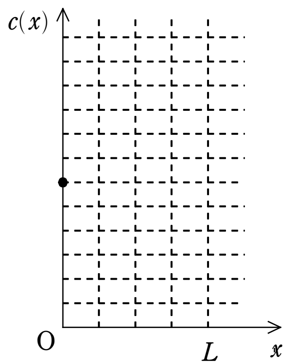
どのセルの気体も同じ圧力になっているので，各セルの幅と位置 x の関係は，圧力一定のときの気体の体積と温度の間に成りたつ法則によって決まる。

(3)　この法則の名称を記せ。

(4)　位置 x のセルの幅 $\Delta(x)$ と左端のセルの幅 $\Delta(0)$ の比 $\dfrac{\Delta(x)}{\Delta(0)}$ を x，L で表せ。

(5)　セル中の気体分子数の密度を c〔mol/m^3〕とする。

(4)の答えを使って $\dfrac{c(x)}{c(0)}$ を x の関数として表せ。次に右図に $c(x)$ のグラフを描け。ただし $x=0$ での $c(0)$ はグラフ中の黒丸で示してある。



(6)　(4)の結果より，左端のセルの幅 $\Delta(0)$ は $T_A=T_B$ のときに比べて増大したか，減少したかがわかる。増大か，減少かを書き，理由を述べよ。

左端のセルの温度は T_A に等しく一定なので，このセルの幅と圧力の関係は温度一定のときの気体の体積と圧力の間に成りたつ法則によって決まる。

(7)　この法則の名称を記せ。

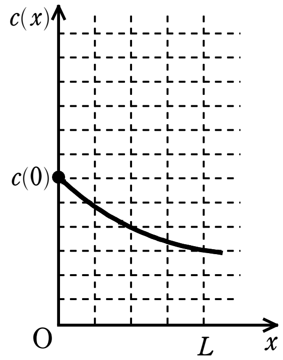
(8)　圧力は $T_A=T_B$ のときに比べて増大したか，減少したか記せ。理由も述べよ。

解答　(1)　$\left(1+\dfrac{x}{L}\right)T_A$

(2)　断熱板は自由に移動できるというから，となりあうセル内の圧力は等しい。よって，気体の圧力はどのセルでも同じになる。

(3)　シャルルの法則　　(4)　$1+\dfrac{x}{L}$

(5)　$\dfrac{L}{L+x}$，右図



(6)　減少，理由：パイプ内の全体の体積は一定で，B に近いセルほど体積は大きいから，左端のセルの体積は減少する。

(7)　ボイルの法則

(8)　増大，理由：左端のセルの体積は減少したから，圧力は増大した。

解説

(1)　B と A の温度差 ΔT は

$$\Delta T=T_B-T_A=2T_A-T_A=T_A$$

温度勾配は

$$\frac{\Delta T}{L}=\frac{T_A}{L}$$

よって，求める T_x は

$$T_x=T_A+\frac{T_A}{L}x=\left(1+\frac{x}{L}\right)T_A$$

(2)　断熱板は自由に移動できるというから，となりあうセル内の圧力は等しい。よって，気体の圧力はどのセルでも同じになる。

(3)　シャルルの法則

(4)　シャルルの法則より

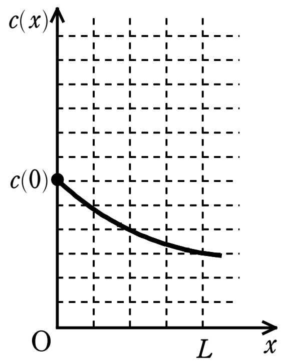
$$\frac{\mathit{\Delta}(x)\cdot S}{T_x}=\frac{\mathit{\Delta}(0)\cdot S}{T_\mathrm{A}}$$

ゆえに　$$\frac{\mathit{\Delta}(x)}{\mathit{\Delta}(0)}=\frac{T_x}{T_\mathrm{A}}=1+\frac{x}{L}$$

(5)　密度と体積は反比例するから

$$\frac{c(x)}{c(0)}=\frac{\mathit{\Delta}(0)}{\mathit{\Delta}(x)}=\frac{L}{L+x}$$

右図。



(6)　**減少**。理由：パイプ内の全体の体積は一定で，Bに近いセルほど体積は大きいから，左端のセルの体積は減少する。

(7)　**ボイルの法則**

(8)　**増大**。理由：左端のセルの体積は減少したから，圧力は増大した。