1．

太陽を周回する惑星の運動に関する次の文章を読み，下の問い((1)〜(3))に答えよ。

惑星が太陽に最も近づく点を近日点，最も遠ざかる点を遠日点と呼ぶ。図1のように，太陽からの惑星の距離と惑星の速さを，近日点で r_1，v_1，遠日点で r_2，v_2 とする。また，太陽の質量，惑星の質量，万有引力定数をそれぞれ M，m，G とする。

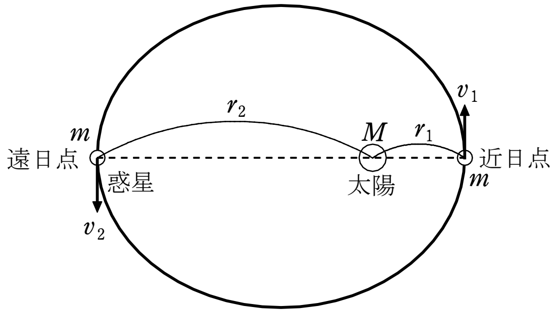


図1

(1) 惑星の運動については「惑星と太陽とを結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である」というケプラーの第二法則(面積速度一定の法則)が成りたつ。これから得られる関係式として正しいものを，次の ①〜⑥ のうちから1つ選べ。 $\boxed{1}$

① $\dfrac{r_1}{Mv_1}=\dfrac{r_2}{mv_2}$　　② $mr_1v_1=Mr_2v_2$

③ $\dfrac{r_1}{mv_1}=\dfrac{r_2}{Mv_2}$　　④ $Mr_1v_1=mr_2v_2$

⑤ $\dfrac{r_1}{v_1}=\dfrac{r_2}{v_2}$　　⑥ $r_1v_1=r_2v_2$

(2) 図2の(a)〜(d)の曲線のうち，太陽からの惑星の距離 r と惑星の運動エネルギーの関係を表すものはどれか。また，距離 r と万有引力による位置エネルギーの関係を表すものはどれか。その組合せとして最も適当なものを，下の ①〜⑥ のうちから1つ選べ。ただし，万有引力による位置エネルギーは，無限遠で0とする。 $\boxed{2}$

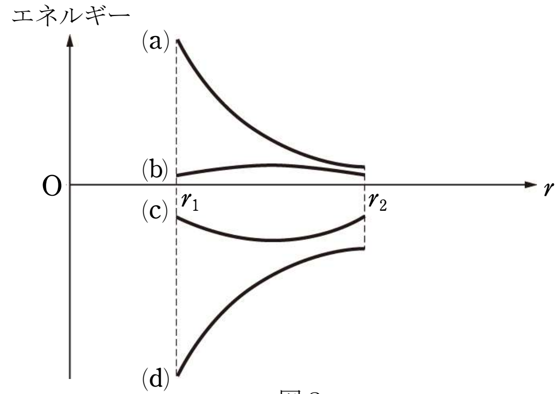


図2

	運動エネルギー	位置エネルギー
①	(a)	(b)
②	(a)	(c)
③	(a)	(d)
④	(b)	(a)
⑤	(b)	(c)
⑥	(b)	(d)

(3) 次の文章中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$・$\boxed{\text{イ}}$ に入れる式と語の組合せとして最も適当なものを，次の ①〜⑧ のうちから1つ選べ。 $\boxed{3}$

惑星の軌道が円である場合と，楕円(だえん)である場合の力学的エネルギーについて考える。図3の軌道Aのように，惑星が半径 r の等速円運動をすると，その速さは $v=\boxed{\text{ア}}$ となる。一方，軌道Bのように，近日点での太陽からの距離が r となる楕円運動の場合，惑星の力学的エネルギーは，軌道Aの場合の力学的エネルギーに比べて $\boxed{\text{イ}}$。

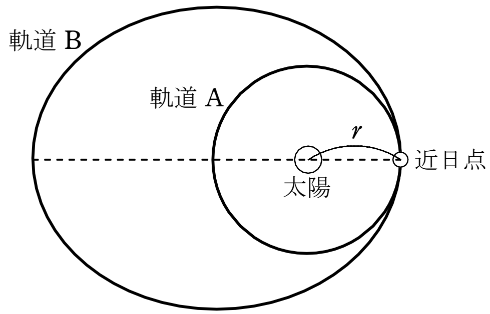


図3

	ア	イ
①	$m\sqrt{\dfrac{G}{Mr}}$	大きい
②	$m\sqrt{\dfrac{G}{Mr}}$	小さい
③	$M\sqrt{\dfrac{G}{mr}}$	大きい
④	$M\sqrt{\dfrac{G}{mr}}$	小さい
⑤	$\sqrt{\dfrac{Gm}{r}}$	大きい
⑥	$\sqrt{\dfrac{Gm}{r}}$	小さい
⑦	$\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$	大きい
⑧	$\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$	小さい

解答　(1) ⑥　(2) ③　(3) ⑦

解説

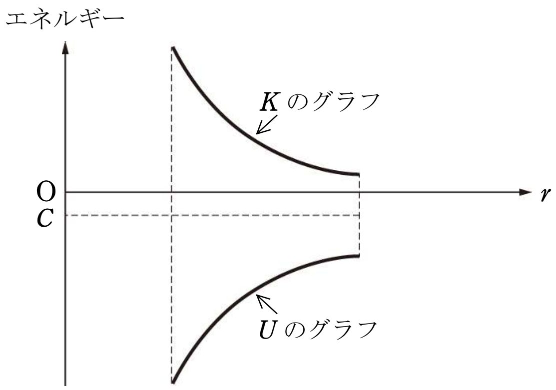
(1) 近日点と遠日点での面積速度が等しいので

$$\frac{1}{2}r_1v_1=\frac{1}{2}r_2v_2$$

よって　$r_1v_1=r_2v_2$

したがって，正しいものは　⑥。

(2) 運動エネルギーを K，万有引力による位置エネルギーを U とすると



$$U=-G\frac{Mm}{r} \quad \cdots\cdots ①$$

$$K+U=C=(一定) \quad \cdots\cdots ②$$

であり，この場合惑星は無限遠点に達することはできないので $K+U=C<0$ である。(惑星の速さを v とすると，①，② 式を用いて

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=C$$

となる。もし $K+U=C\geqq 0$ であるとして，この式で $r\to\infty$ とすると

$$v=\sqrt{\frac{2C}{m}}$$

となり，無限遠点で速さ v をもつことになる。よって $K+U=C<0$ である。)

したがって，グラフは図のようになる。

以上より，最も適当なものは　③。

(3) 等速円運動のとき，中心方向の運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}$$

よって　$v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$

また，近日点における軌道 A と軌道 B の位置エネルギーは等しいので，近日点での運動エネルギー，すなわち速さの大小を比べればよい。

太陽のまわりを等速円運動する物体をある点で加速すると，その点を近日点として，より大きな軌道 (楕円軌道) をとることができるようになる。ゆえに，軌道 B のほうが近日点での速さが大きく，力学的エネルギーが大きいということになる。

以上より，最も適当なものは　⑦。

2．

質量 m の人工衛星が，地球のまわりを速さ v で円運動している。人工衛星の地表面からの高さを h，地球の質量を M，地球の半径を R，万有引力定数を G とする。また，地球の自転や公転の影響，他の天体の及ぼす影響は無視できるものとする。

(1)　人工衛星が地球から受ける万有引力の大きさ F を表す式として最も適当なものを，次の ①～⑧ のうちから 1 つ選べ。$F=$ $\boxed{1}$

① $\dfrac{GMm}{R}$　② $\dfrac{GMm}{R^2}$　③ $\dfrac{GMmh}{R^2}$

④ $\dfrac{GMm}{R+h}$　⑤ $\dfrac{GMm}{(R+h)^2}$　⑥ $\dfrac{GMmh}{(R+h)^2}$

⑦ $\dfrac{GMm}{h}$　⑧ $\dfrac{GMm}{h^2}$

(2)　人工衛星の速さ v を表す式として最も適当なものを，次の ①～⑨ のうちから 1 つ選べ。$v=$ $\boxed{2}$

① $\sqrt{\dfrac{hF}{m}}$　② $\sqrt{\dfrac{RF}{m}}$　③ $\sqrt{\dfrac{(R+h)F}{m}}$

④ $\dfrac{hF}{m}$　⑤ $\dfrac{RF}{m}$　⑥ $\dfrac{(R+h)F}{m}$

⑦ $\dfrac{h^2F}{m}$　⑧ $\dfrac{R^2F}{m}$　⑨ $\dfrac{(R+h)^2F}{m}$

(3)　人工衛星の運動には，惑星の運動に関する法則と同様の法則が適用できる。人工衛星の周期 T の 2 乗と，地球の中心からの距離 a の 3 乗の比 $k=\dfrac{T^2}{a^3}$ について述べた文として最も適当なものを，次の ①～⑤ のうちから 1 つ選べ。$\boxed{3}$

① k は m と v に比例する。

② k は m と v に反比例する。

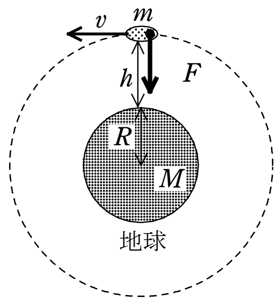
③ k は v にはよらないが，m に比例する。

④ k は v にはよらないが，m に反比例する。

⑤ k は m にも v にもよらない。

解答　(1) ⑤　(2) ③　(3) ⑤

解説



(1) 人工衛星の地球の中心からの距離は $R+h$ なので，人工衛星が地球から受ける万有引力の大きさ F は

$$F=\frac{GMm}{(R+h)^2}$$

以上より，正しいものは ⑤。

(2) 円の中心方向の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{(R+h)}=F \qquad ゆえに \quad v=\sqrt{\frac{(R+h)F}{m}}$$

以上より，正しいものは ③。

(3) ケプラーの第三法則から，太陽のまわりを回る惑星の公転周期 T の 2 乗と軌道だ円の半長軸 a の 3 乗の比は，すべての惑星について一定の値となる。この法則は，地球のまわりを円運動する人工衛星についても成りたち，人工衛星の質量 m や速さ v が異なると円軌道の半径 a が異なるが，a の 3 乗とその周期 T の 2 乗の比は一定となる。

以上より，**k は m にも v にもよらない**。最も適当なものは ⑤。