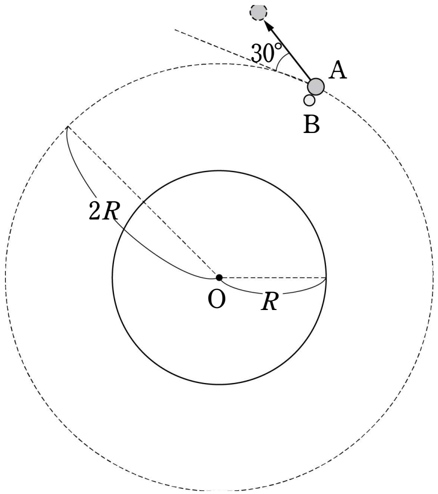
1．

次の文中の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる式または数値を入れよ。ただし，地表での重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。また，地球の自転と公転や大気の影響はないものとし，地球が及ぼす引力は，地球の全質量がその中心にあるとしたときの万有引力に等しいとする。



地球を中心 O，半径 R〔m〕の球とし，質量 m〔kg〕の小物体 A が O を中心として半径 $2R$ で等速円運動している。地球と A との間にはたらく万有引力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$〔N〕であり，A の速さは $\boxed{\text{イ}}$〔m/s〕である。

図のように，質量 $\dfrac{m}{2}$ の小物体 B を地表から鉛直上向きに打ち上げて，等速円運動していた小物体 A の進行方向に対して垂直に衝突させたところ，衝突直後の B の速さは 0 となり，A の進行方向は 30° 変化した。この衝突は瞬間的であった。衝突直前の B の速さは衝突直前の A の速さの $\boxed{\text{ウ}}$ 倍であり，衝突により A が得た運動エネルギーは B が失った運動エネルギーの $\boxed{\text{エ}}$ 倍である。

万有引力による位置エネルギーの基準点を無限遠にとると，B との衝突直後の A の力学的エネルギー（運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーの和）は $\boxed{\text{オ}}$〔J〕である。一方，衝突後の B は地球からの万有引力だけを受けて地表に落下した。地表に到達する直前の B の速さは $\boxed{\text{カ}}$〔m/s〕となる。

衝突後の小物体 A は，地球の中心 O を 1 つの焦点とするだ円軌道上を運動し，A の地球に対する面積速度は衝突前後で変化しない。A がだ円軌道の長軸上を通過するときの面積速度が，A と O の間の距離と A の速度の積の $\dfrac{1}{2}$ として表されることから，衝突後の A が地球に最も接近したときの A と O の間の距離は $\boxed{\text{キ}}$〔m〕と求まる。「惑星の公転周期の 2 乗とだ円軌道の半長軸の 3 乗の比の値は，すべての惑星について同じ値である」というケプラーの第三法則は A にも当てはまる。衝突後の A のだ円運動の周期は，衝突前の A の円運動の周期の $\boxed{\text{ク}}$ 倍であることがわかる。

解答　（ア）$\dfrac{1}{4}mg$　（イ）$\sqrt{\dfrac{1}{2}gR}$　（ウ）$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　（エ）$\dfrac{1}{2}$

（オ）$-\dfrac{1}{6}mgR$　（カ）$\sqrt{gR}$　（キ）$(3-\sqrt{3})R$　（ク）$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$

（解説）

万有引力定数を G〔N·m^2/kg^2〕として，以下の解答の過程に用いる。

（ア）A と地球（質量 M〔kg〕）との間にはたらく万有引力の大きさ F〔N〕は

$$F=G\frac{Mm}{(2R)^2}$$

ところで，A が地表にあったとき，A にはたらく重力の大きさは地球から受ける万有引力の大きさに等しいので

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}$$

以上 2 式より G を消去して

$$F=\frac{1}{4}mg\ \text{〔N〕}$$

（イ）A の等速円運動の運動方程式は，速さを v〔m/s〕とすると

$$m\frac{v^2}{2R}=F$$

（ア）の答えを用いて整理すると

$$v=\sqrt{\frac{1}{2}gR}\ \text{〔m/s〕}$$

（ウ）

衝突直前　　　　衝突直後

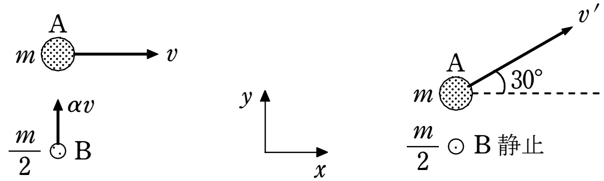


図 a

図 a のように，衝突直前の A の速度の方向を x 方向とする。また，それに対して垂直な，衝突直前の B の速度の方向を y 方向とし，その速さを A の α 倍とする。また，衝突直後の A の速さを v'〔m/s〕とする。このとき，衝突の直前直後で A と B の運動量の和は保存されるため，x 方向について

$$mv=mv'\cos 30°$$

y 方向について　$\dfrac{m}{2}(\alpha v)=mv'\sin 30°$

以上 2 式より　$\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$（倍）

(エ)　衝突によりAが得た運動エネルギー $\varDelta K_{\mathrm{A}}$〔J〕とBが失った運動エネルギー $\varDelta K_{\mathrm{B}}$〔J〕の比をとると，(ウ)の答えを用いることで

$$\frac{\varDelta K_{\mathrm{A}}}{\varDelta K_{\mathrm{B}}}=\frac{\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)(\alpha v)^2}=\frac{1}{2}\ (\text{倍})$$

(オ)　衝突直後のAの力学的エネルギー E_{A}〔J〕は，(ア)〜(ウ)の答えを用いることで

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{A}}&=\frac{1}{2}mv'^2-G\frac{Mm}{2R}\\&=\frac{2}{3}mv^2-\frac{1}{2}mgR\\&=\frac{1}{3}mgR-\frac{1}{2}mgR\\&=-\frac{1}{6}mgR\ \text{〔J〕}\end{aligned}$$

(カ)　衝突直後から落下直前まで，Bの力学的エネルギーは保存される。落下直前のBの速さを v_{B}〔m/s〕とすると

$$-G\frac{M\left(\frac{m}{2}\right)}{2R}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v_{\mathrm{B}}{}^2-G\frac{M\left(\frac{m}{2}\right)}{R}$$

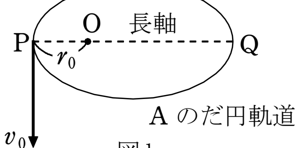
(ア)を用いて整理すると

$$v_{\mathrm{B}}=\sqrt{gR}\ \text{〔m/s〕}$$

(キ)　衝突直前，Aは円軌道を描いていたことから，面積速度は

$$S=\frac{1}{2}(2R)v=Rv$$

であり，衝突直後もこれが保たれる。



図b

図bにあるように，Aが地球の最近接点Pを通過するとき，長軸上を通ることになり，このときの面積速度は，$\mathrm{OP}=r_0$，速さを v_0 とすると

$$S_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}r_0v_0$$

である。Aがだ円軌道上を運動している間，面積速度は一定であるため，$S=S_{\mathrm{P}}$

よって　$Rv=\frac{1}{2}r_0v_0$　…… ①

ところで，衝突直後からAの力学的エネルギーは保存されるため，衝突直後と点Pでの力学的エネルギーは等しく

$$E_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}mv_0{}^2-G\frac{Mm}{r_0}\quad\cdots\cdots ②$$

② 式の左辺に(オ)の答えを用いて，右辺に ① 式を用いると

$$-\frac{1}{6}mgR=\frac{1}{2}m\left(\frac{2R}{r_0}v\right)^2-G\frac{Mm}{r_0}$$

さらに右辺に(イ)の答えを用い，(ア)を参考に書きかえると

$$-\frac{1}{6}mgR=\frac{mgR^3}{r_0{}^2}-\frac{mgR^2}{r_0}$$

両辺に $\frac{6}{mgR}$ をかけ，移項して整理すると

$$6\left(\frac{R}{r_0}\right)^2-6\left(\frac{R}{r_0}\right)+1=0$$

これは $\frac{R}{r_0}$ の2次方程式であり，その解は

$$\frac{R}{r_0}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$$

この2つの解が，PとQのOからの距離に対応するが，そのうちPはOと最近接なので，r_0 の小さいほうを選ぶと

$$\frac{R}{r_0}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

よって　$r_0=\frac{6R}{3+\sqrt{3}}=(3-\sqrt{3})R$〔m〕

(ク)　Aのだ円軌道の半長軸の長さ b〔m〕は図bと(キ)の答えより

$$b=\frac{1}{2}(\mathrm{OP}+\mathrm{OQ})=\frac{1}{2}\left(\frac{6R}{3+\sqrt{3}}+\frac{6R}{3-\sqrt{3}}\right)=3R$$

である。衝突前のAの運動周期を T〔s〕，衝突後を T'〔s〕とすると，ケプラーの第三法則より，衝突の前後で

$$\frac{T^2}{(2R)^3}=\frac{T'^2}{b^3}$$

上で求めた $b=3R$ を用いて整理すると

$$\frac{T'}{T}=\left(\frac{3R}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}\text{（倍）}$$

２．

質量 $m_{\rm p}$ の惑星探査船（以下，探査船）と質量 $M_0\,(>m_{\rm p})$ の本体からなる全質量 M（$=M_0+m_{\rm p}$）の宇宙ステーション S（以下，S）を，図 1 のように，地表上の点 A から地表に対して鉛直上向きに，速さ V_0 で打ち上げた。このとき，S が到達できる地表からの最大高度は h であった。地球は半径 R，質量 $M_{\rm E}$ の密度が一様な球で，静止しているものとする。また，地球の中心を O，A から h の距離にある点を P とし，点 O，A，P は同一直線 L 上にあるものとする。

万有引力定数を G，地表における重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。ただし，探査船，本体および S は，それぞれ，質点とみなすことができるものとし，これらと地球との間にはたらく万有引力に対して，探査船と本体との間の万有引力，他の天体との間の相互作用，地球の大気の影響などは無視できるものとする。

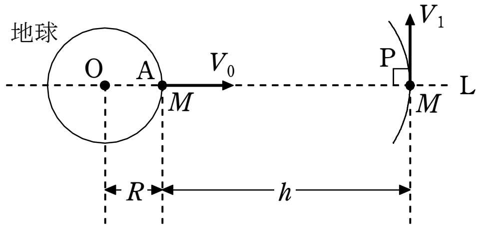


図 1

(1)　地表における重力加速度の大きさ g と万有引力定数 G は $GM_{\rm E}=gR^2$ を満たす。いま，S が最大高度 h の点 P に達したとき，S にはたらく万有引力の大きさ $F_{\rm S}$ および位置エネルギー $U_{\rm S}$ を，M，g，R，h を用いて表せ。ただし，万有引力による位置エネルギーの基準点は無限遠点とする。

(2)　最大高度 h を V_0，g，R を用いて表せ。

(3)　S が点 P に達した直後，L と垂直の向きに速さ V_1 の速度を S に与え，O を中心として半径 $R+h$ の等速円運動をさせた。V_1 を h，g，R を用いて表せ。

(4)　次に，等速円運動をしている S から，探査船を，S の速度と同一の向きに，分離前の S に対して速さ $v_{\rm p}$ で発射し，本体と分離した。探査船が無限遠方に到達できるために必要な $v_{\rm p}$ の最小値 $v_{\rm m}$ を，V_1 を用いて表せ。

(5)　無限遠方に向けて飛行していた探査船は，その後，地球への帰還の途についた。帰還飛行において，探査船は，図 2 のように，O から $2R$ の距離にある L 上の点 B に L と垂直の向きに速さ v_B で突入し，BC を長軸とする楕円軌道に入り周回運動をした。ただし，点 C は O から $3R$ の距離にある L 上の点である。

探査船が C を通過するときの速さ v_C と v_B の比 $\dfrac{v_C}{v_B}$ を求めよ。また，v_B を g，R を用いて表せ。

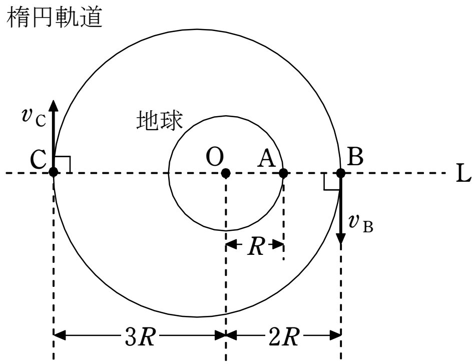


図 2

解答　(1)　$F_S : \left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 Mg$　　$U_S : -\dfrac{MgR^2}{R+h}$　　(2)　$\dfrac{V_0{}^2 R}{2gR - V_0{}^2}$

(3)　$\sqrt{\dfrac{gR^2}{R+h}}$　　(4)　$(\sqrt{2}-1)V_1$　　(5)　$\dfrac{v_C}{v_B} : \dfrac{2}{3}$　　$v_B : \sqrt{\dfrac{3}{5}gR}$

解説

(1)　万有引力の法則「$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$」より

$$F_S = G\frac{M_E M}{(R+h)^2} = gR^2 \frac{M}{(R+h)^2}$$

$$= \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 Mg$$

また，万有引力による位置エネルギーの式「$U = -G\dfrac{Mm}{r}$」と $GM_E = gR^2$ より

$$U_S = -G\frac{M_E M}{R+h} = -\frac{MgR^2}{R+h}$$

(2)　点 A と点 P での力学的エネルギーの保存より

$$\frac{1}{2}MV_0{}^2 - G\frac{M_E M}{R} = U_S$$

$GM_E = gR^2$ と (1) の結果より

$$\frac{1}{2}MV_0{}^2 - MgR = -\frac{MgR^2}{R+h}$$

よって　$R+h = -\dfrac{2MgR^2}{MV_0{}^2 - 2MgR}$

ゆえに　$h = -R\left(\dfrac{2gR}{V_0{}^2 - 2gR} + 1\right) = \dfrac{V_0{}^2 R}{2gR - V_0{}^2}$

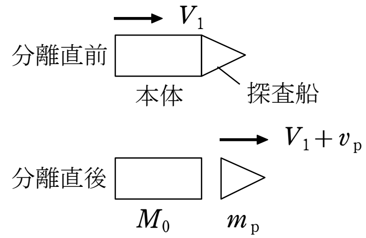
(3)　S は万有引力を向心力として速さ V_1 で半径 $R+h$ の等速円運動をするので，円運動の運動方程式「$m\dfrac{v^2}{r} = F$」より

$$M\frac{V_1{}^2}{R+h} = G\frac{M_E M}{(R+h)^2}$$

よって　$V_1{}^2 = \dfrac{gR^2}{R+h}$

ゆえに　$V_1 = \sqrt{\dfrac{gR^2}{R+h}}$

(4)　分離直後と無限遠方での力学的エネルギーは等しい。無限遠方に達するとき，力学的エネルギーが 0 以上となればよいので



$$\frac{1}{2}m_p(V_1 + v_p)^2 + \left(-G\frac{M_E m_p}{R+h}\right) \geqq 0$$

$GM_E = gR^2$ より

$$\frac{1}{2}m_p(V_1 + v_p)^2 - \frac{m_p gR^2}{R+h} \geqq 0$$

(3) より $\dfrac{gR^2}{R+h} = V_1{}^2$ であるから

$$\frac{1}{2}(V_1 + v_p)^2 - V_1{}^2 \geqq 0$$

よって　$(V_1 + v_p)^2 \geqq 2V_1{}^2$

$(V_1 + v_p) \geqq \sqrt{2}V_1$

$v_p \geqq (\sqrt{2}-1)V_1$

ゆえに　$v_m = (\sqrt{2}-1)V_1$

(5)　ケプラーの第二法則 (面積速度一定の法則) より

$$\frac{1}{2}\cdot 2R \cdot v_B = \frac{1}{2}\cdot 3R \cdot v_C$$

よって　$\dfrac{v_C}{v_B} = \dfrac{2}{3}$　……①

また，楕円軌道上を運動する探査船の点 B と点 C での力学的エネルギーの保存より

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{B}}{}^{2}-G\frac{M_{\mathrm{E}}m_{\mathrm{p}}}{2R}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{C}}{}^{2}-G\frac{M_{\mathrm{E}}m_{\mathrm{p}}}{3R}$$

$GM_{\mathrm{E}}=gR^{2}$ より

$$v_{\mathrm{B}}{}^{2}-gR=v_{\mathrm{C}}{}^{2}-\frac{2}{3}gR$$

① 式より　$v_{\mathrm{B}}{}^{2}-gR=\left(\frac{2}{3}v_{\mathrm{B}}\right)^{2}-\frac{2}{3}gR$

よって　$v_{\mathrm{B}}=\sqrt{\frac{3}{5}gR}$