１．

図１のように地球を中心とする半径 r〔m〕の円軌道上を回る人工衛星と，同一平面上の，それより大きい半径 R〔m〕の円軌道上を同じ向きに回る宇宙ステーションの，ランデヴー（出会い）について考えよう。万有引力定数を G〔$\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$〕，地球の質量を M〔kg〕，人工衛星の質量を m〔kg〕として，次の問いに答えよ。ただし，地球のまわりを万有引力だけを受けて円運動やだ円運動する宇宙ステーションや人工衛星についても，惑星の運動に関するケプラーの法則と同じ法則が成りたつ。

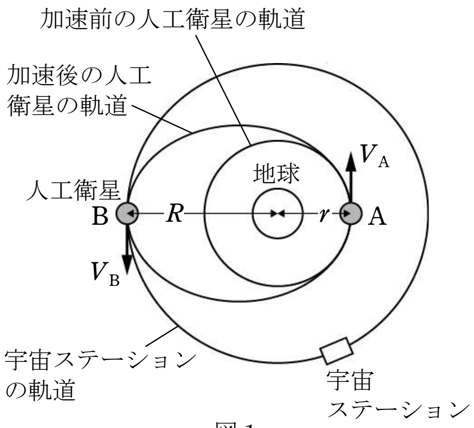


図１

(1)　地球を中心とする半径 r の円軌道上を回る人工衛星の速さ V_0〔m/s〕を求めよ。

(2)　この人工衛星の円運動の周期 T_0〔s〕を求めよ。ただし解答に V_0 を用いてはならない。

図１に示すように，点Ａで，人工衛星の速さを V_0 から，瞬時に加速して，V_A〔m/s〕にしたところ，人工衛星はＡＢを長軸とするだ円軌道上を運動し，地球から最も遠ざかった点（点Ｂ）における速さは V_B〔m/s〕で，地球からの距離は R であった。

(3)　人工衛星の力学的エネルギーが，点Ａと点Ｂで等しいことを表す式を示せ。

(4)　V_B を V_A，r，R を用いて表せ。

(5)　(3)と(4)の結果より，V_B を消去して V_A を求め，G，M，R，r を用いて表せ。

(6)　比 $\dfrac{V_A}{V_0}$ を R と r だけを用いて表せ。

(7)　一般に，地球のまわりを，地球からの万有引力だけを受けて回る人工衛星または宇宙ステーションのだ円または円運動の周期の２乗は，その軌道の半長軸または半径の何乗に比例するか。

図１のだ円軌道上を運動する人工衛星の周期を T〔s〕，半径 R の円軌道上を等速円運動する宇宙ステーションの周期を T_S〔s〕とする。

(8)　比 $\dfrac{T}{T_S}$ を R と r だけを用いて表せ。

人工衛星が地球から最も遠ざかった点Ｂに到達したとき，宇宙ステーションの位置は，図２の点Ｃであった。一般に，点Ｂと点Ｃは離れている。$R>r$ であるから，(8)の結果より，人工衛星が図２のように，点Ｂから地球のまわりのだ円軌道上を１周してもとの点Ｂにもどってきたとき，宇宙ステーションはもとの点Ｃにはもどらず，その位置は，図２の点Ｄであった。地球の中心を点Ｏとして，角ＣＯＤを θ〔rad〕とする。

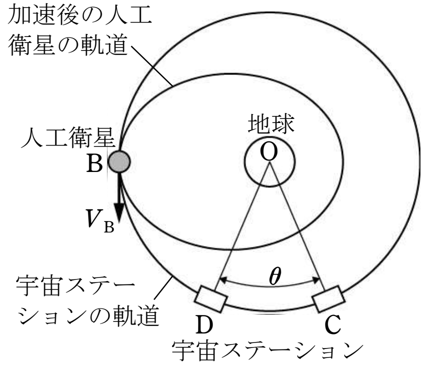


図２

(9)　θ を T，T_S だけを用いて表せ。

点Ｄと点Ｃを比べると，点Ｄのほうが点Ｂに近いので，人工衛星が，さらに地球のまわりを何回か回って点Ｂにもどってきたとき，宇宙ステーションは人工衛星にさらに接近し，その位置が図３の点Ｅであった。この時点で人工衛星を宇宙ステーションと同じ円軌道にのせよう。そのためには，人工衛星の速さを V_B から，宇宙ステーションと同じ速さ V_S〔m/s〕まで，瞬時に加速すればよい。

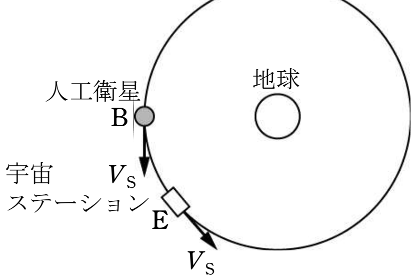


図３

(10)　比 $\dfrac{V_S}{V_B}$ を R と r を用いて表せ。

こうして図３のように，人工衛星は，宇宙ステーションと同じ円軌道上を，同じ速さで回るようになった。しかし，まだ両者は離れている。これを近づけるには，人工衛星を加速すればよいように思えるが，加速したとたんに人工衛星の軌道は外側にずれてしまい，宇宙ステーションと出会うことができなくなる。そこで図４のように人工衛星の速さを，向きを変えずに V_S から V_S+u〔m/s〕に瞬時に加速した直後から，人工衛星に，地球の中心方向を向いた大きさ F〔N〕の力を加え続け，人工衛星が速さ V_S+u で，半径 R の円軌道上を運動するようにする。

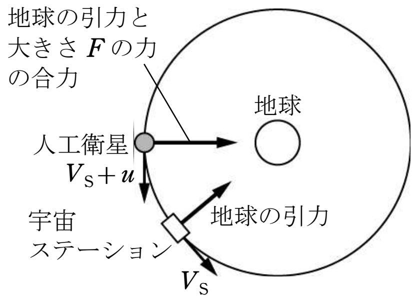


図４

(11)　人工衛星に加え続けなければならない力の大きさ F を m，u，R，V_S を用いて表せ。

人工衛星の速さは宇宙ステーションの速さより大きいので，ついには，両者は出会う。その瞬間に人工衛星の速さを V_S+u から V_S にもどし，同時に大きさ F の力を加えるこ

とをやめればよい。こうして，ランデヴー(出会い)は完了する。

解答　(1)　$\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$〔m/s〕　(2)　$2\pi r\sqrt{\dfrac{r}{GM}}$〔s〕

(3)　$\dfrac{1}{2}mV_A{}^2-G\dfrac{Mm}{r}=\dfrac{1}{2}mV_B{}^2-G\dfrac{Mm}{R}$　(4)　$\dfrac{r}{R}V_A$〔m/s〕

(5)　$\sqrt{\dfrac{2GMR}{r(R+r)}}$〔m/s〕　(6)　$\sqrt{\dfrac{2R}{R+r}}$　(7)　3 乗　(8)　$\left(\dfrac{R+r}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$

(9)　$2\pi\dfrac{T_S-T}{T_S}$〔rad〕　(10)　$\sqrt{\dfrac{R+r}{2r}}$　(11)　$\dfrac{m}{R}(2uV_S+u^2)$〔N〕

解説

(1)　人工衛星は地球との間の万有引力を向心力として回転半径 r〔m〕で円運動している。

円運動の運動方程式「$m\dfrac{v^2}{r}=f$」，万有引力の法則「$F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$」より

$$m\frac{V_0{}^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2}$$

よって　$V_0=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$〔m/s〕

(2)　円運動の周期の式「$T=\dfrac{2\pi r}{v}$」より

$$T_0=\frac{2\pi r}{V_0}=2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\ \text{〔s〕}$$

(3)　人工衛星の力学的エネルギーは運動エネルギーと万有引力による位置エネルギーとの和となる。また万有引力による位置エネルギーの式「$U=-G\dfrac{Mm}{r}$」より

$$\frac{1}{2}mV_A{}^2-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}mV_B{}^2-G\frac{Mm}{R}$$

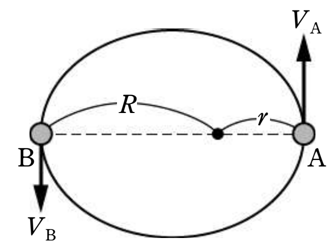


図 a

(4)　ケプラーの第二法則(面積速度一定の法則)より

$$\frac{1}{2}rV_A=\frac{1}{2}RV_B$$

よって　$V_B=\dfrac{r}{R}V_A$〔m/s〕

(5)　(4) の結果を (3) の結果に代入して

$$\frac{1}{2}mV_A{}^2-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}m\left(\frac{r}{R}V_A\right)^2-G\frac{Mm}{R}$$

式を整理して　$V_A=\sqrt{\dfrac{2GMR}{r(R+r)}}$〔m/s〕

(6)　(1)，(5) の結果より

$$\frac{V_A}{V_0}=\sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}}\sqrt{\frac{r}{GM}}=\sqrt{\frac{2R}{R+r}}$$

(7)　(2) の結果より

$$T_0{}^2=\left(2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\right)^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

このように，周期の 2 乗は，半径の 3 乗に比例する。

参考　ケプラーの第三法則「惑星の公転周期 T の 2 乗は，軌道だ円の半長軸 a の 3 乗に比例する。」

(8)　ケプラーの第三法則「$\dfrac{T^2}{a^3}=k$ (定数)」より

$$\frac{T^2}{\left(\dfrac{R+r}{2}\right)^3}=\frac{T_S{}^2}{R^3}\quad\text{よって}\quad\frac{T}{T_S}=\left(\frac{R+r}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$

(9)　宇宙ステーションが θ〔rad〕移動するには T_S-T〔s〕かかる。軌道を 1 周 (2π rad) するには T_S〔s〕かかるので

$$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{T_S-T}{T_S}$$

$$\theta=2\pi\frac{T_S-T}{T_S}\ \text{〔rad〕}$$

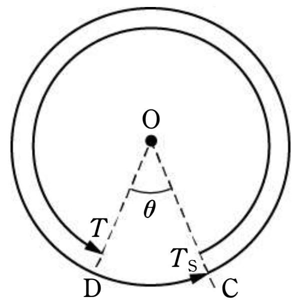


図 b

(10)　人工衛星が円軌道にのったとき，万有引力を向心力として，回転半径 R〔m〕で円運動している。円運動の運動方程式を立てると

$$m\frac{V_S{}^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}$$

よって　$V_S=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$〔m/s〕

また，(4)，(5) の結果より

$$V_B=\frac{r}{R}\sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}}=\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

よって

$$\frac{V_S}{V_B}=\sqrt{\frac{GM}{R}}\sqrt{\frac{R(R+r)}{2GMr}}=\sqrt{\frac{R+r}{2r}}$$

(11)　人工衛星は万有引力と大きさ F〔N〕の力との合力を向心力として，回転半径 R〔m〕で円運動している。円運動の運動方程式を立てると

$$m\frac{(V_S+u)^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}+F$$

$$F=m\frac{(V_S+u)^2}{R}-G\frac{Mm}{R^2}$$

$$=m\frac{(V_S+u)^2}{R}-m\frac{{V_S}^2}{R}$$

$$=\frac{m}{R}(2uV_S+u^2)\ \text{〔N〕}$$

２．

次の文中の各問いに答えよ。

ある点と物体を結ぶ線分が短い時間 Δt の間に描く面積を ΔS とするとき，$W=\frac{\Delta S}{\Delta t}$ を物体のその点に関する面積速度という。惑星の太陽の位置に関する面積速度は一定であること(ケプラーの第二法則)が知られている。面積速度が一定となる他の例を調べてみる。

［A］　図1に示すように，点Oと質量 m の物体が伸び縮みしない糸で結ばれていて，物体は中心O，半径 l の円周上で速さ v の等速円運動をしている。

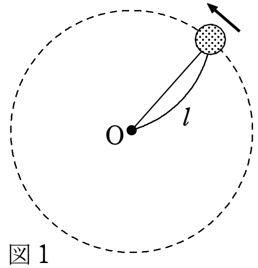


図1

(1)　点Oに関する物体の面積速度が，一定の値 $\frac{vl}{2}$ になることを説明せよ。

(2)　この物体にはたらく遠心力とはどのようなもので，どういう場合に考える必要が生じるのかを説明せよ。

［B］　図2に示すように質量 m の物体Aと物体Bは，ある水平でなめらかな平面上の点Oに開けられた小さな穴を通る糸で互いにつながれている。糸は，細く表面がなめらかで質量が無視でき，伸び縮みせずゆるむことはないとする。物体Aはその水平な平面上を回転し，物体Bは鉛直方向に運動するとし，物体Aの運動する面内に x 軸と y 軸をとり，鉛直方向を z 軸とする。糸の張力の大きさを T，重力加速度の大きさを g，OAの長さを r，OAと x 軸のなす角度を θ とし，両物体とも点Oに達することはないものとする。最初に物体Aが等速円運動をする場合を考える。

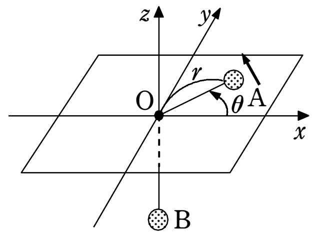


図2

(3)　物体Aが，$r=r_0$ の円周上で速さ v_0 の等速円運動をしているとき，r_0 は g と v_0 だけを用いて表せることを説明し，r_0 の表式を求めよ。

次に，r が一定とは限らない一般の場合を考える。

(4)　物体Aの x，y 軸方向の加速度 a_x，a_y と物体Bの加速度 b を T を用いて表せ。

点Oにいて，物体Aと同じ角速度 ω で回転する観測者Cから見ると，物体Aにはたらく OA方向の慣性力は半径 r，角速度 ω の等速円運動の場合と同じになる。観測者Cから見た物体AのOA方向の加速度を a_r とする。

(5)　a_r を m，ω，T，r だけを用いて表せ。

糸は伸び縮みしないので，物体Bの加速度 b は加速度 a_r に等しい。

(6)　(4)で求めた物体Bの加速度の式から T を求め，(5)の結果に代入し a_r を r，g，

ω だけを用いて表せ。

図3に示すように，ある時刻の物体Aの位置 $\vec{r}$ の x，y 座標を X，Y，速度 $\vec{v}$ の x，y 成分を v_x，v_y とすると，短い時間 Δt の後には物体Aは点Dに達し，θ は $\Delta\theta$ だけ変化する。OAが Δt の間に描く面積を ΔS とすると，ΔS は三角形OADの面積となるので，その時刻での物体Aの面積速度は $W=\dfrac{1}{2}(Xv_y-Yv_x)$ と表せる。

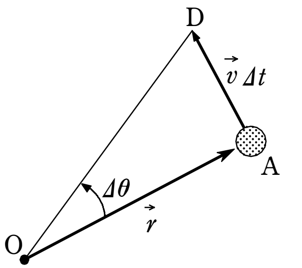


図3

(7)　短い時間 Δt の間の W の変化 ΔW は，(4)で求めた物体Aの加速度の式を用い，Δt の2乗に比例する項を無視すると0となることを示せ。

(7)の結果より短い時間 Δt に対してつねに $\dfrac{\Delta W}{\Delta t}=0$ となり，W の値は一定で変化しないことがわかる。すなわち面積速度 W が一定となることが示された。角速度 $\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$，OAの長さ r を用いると，$W=\dfrac{1}{2}r^2\omega$ とも表せる。

物体Aは，(3)と同様，速さ v_0，半径 r_0 で点Oが中心の等速円運動をしていたが，ある時刻にOA方向にさらに別の力が短い時間はたらいて円運動から少しずれた運動を始めたとする。その際，面積速度 W は，別の力のはたらく以前の等速円運動のときと等しい一定の値を保つ。それ以降，r の r_0 からのずれ $\varepsilon=r-r_0$ の絶対値は小さいとする。

(8)　W が一定であることから，ω を r を用いて表せ。その結果を(6)の結果に代入し，ε の絶対値が小さいことを用いると，別の力がはたらいた後の物体Aは，観測者Cから見て，線分OA上で $r=r_0$ の点を中心とした単振動をすることを示し，その角振動数を求めよ。ただし，δ の絶対値が小さいとき $\dfrac{1}{(1+\delta)^n}\fallingdotseq 1-n\delta$ と近似できることを用いてよい。

物体にはたらく力が，ある点と物体を結ぶ直線の方向をつねに向く場合，その点を力の中心という。一般に，そのような力だけが物体にはたらいている場合には物体の力の中心に関する面積速度が一定となることが知られている。〔A〕，〔B〕や惑星の運動は，この場合にあてはまる。

解答　〔A〕(1)　略　　(2)　略

〔B〕(3)　$\dfrac{{v_0}^2}{g}$　　(4)　$a_x=-\dfrac{T}{m}\cos\theta$，$a_y=-\dfrac{T}{m}\sin\theta$，$b=\dfrac{T}{m}-g$

(5)　$r\omega^2-\dfrac{T}{m}$　　(6)　$\dfrac{r\omega^2-g}{2}$　　(7)　略

(8)　$\omega=\dfrac{\sqrt{g{r_0}^3}}{r^2}$，略，角振動数：$\sqrt{\dfrac{3g}{2r_0}}$

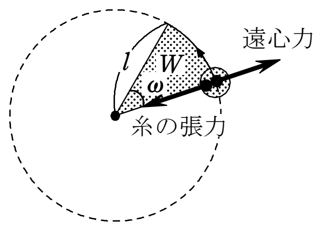
解説

〔A〕(1)　物体の角速度を ω とすると，面積速度 W は図aの扇形(中心角 ω)の面積である。円運動の速さの式「$v=r\omega$」より

$$\omega=\frac{v}{l}$$

であるから

$$W=\frac{1}{2}\omega l^2=\frac{1}{2}\frac{v}{l}l^2=\frac{vl}{2}$$



図a

(2)　この物体と同じ角速度で等速円運動をしている観測者がこの物体を見ると，物体は静止して見える。このとき物体にはたらく糸の張力とつりあっている力として遠心力を考える必要がある。その大きさは物体の向心力と同じ大きさ $m\dfrac{v^2}{l}$ で，半径方向の中心Oから遠ざかる向きにはたらく。

〔B〕(3)　物体Bは鉛直方向に動かないから(図b)

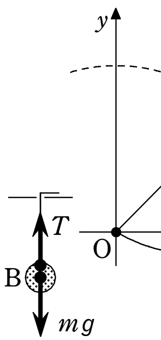
$$T=mg$$

物体Aの運動方程式は

$$m\frac{{v_0}^2}{r_0}=T$$

これら2式より　$m\dfrac{{v_0}^2}{r_0}=mg$

よって　$r_0=\dfrac{{v_0}^2}{g}$　……①



図b

(4)　糸の張力の大きさ T を x 成分 T_x，y 成分 T_y に分解すると，図cからわかるように

$$T_x=-T\cos\theta$$

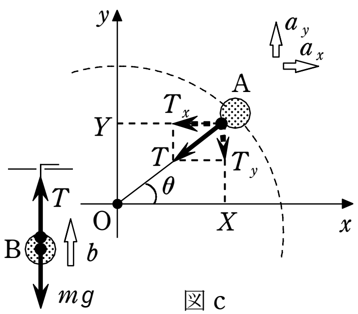
$$T_y=-T\sin\theta$$

よって，x 方向，y 方向の運動方程式より

$$ma_x=T_x=-T\cos\theta$$

$$ma_y=T_y=-T\sin\theta$$

ゆえに



図c

$$a_x = -\frac{T}{m}\cos\theta,\quad a_y = -\frac{T}{m}\sin\theta \quad \cdots\cdots ②$$

物体 B の運動方程式は (図 c)　$mb = T - mg$

したがって　$b = \dfrac{T}{m} - g$　　　　…… ③

(5)　観測者 C が見るときは，遠心力 $mr\omega^2$ を考えれば運動の法則が成りたつから，OA 方向の運動方程式は

$$ma_r = mr\omega^2 - T$$

よって

$$a_r = r\omega^2 - \frac{T}{m} \quad \cdots\cdots ④$$

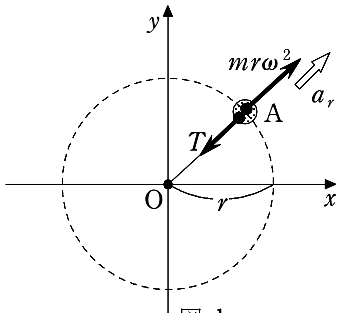


図 d

(6)　③ 式より　$T = m(b+g)$

④ 式に代入して　$a_r = r\omega^2 - b - g$

$b = a_r$ であるから

$$a_r = r\omega^2 - a_r - g$$

$$2a_r = r\omega^2 - g$$

ゆえに　$a_r = \dfrac{r\omega^2 - g}{2}$　　　　…… ⑤

(7)　短い時間 Δt の間の X，Y，v_x，v_y の変化をそれぞれ ΔX，ΔY，Δv_x，Δv_y とすると　$\Delta W = \dfrac{1}{2}\{(X+\Delta X)(v_y+\Delta v_y) - (Y+\Delta Y)(v_x+\Delta v_x)\} - \dfrac{1}{2}(Xv_y - Yv_x)$

Δt が小さいときは

$$\Delta v_x = a_x\Delta t,\quad \Delta v_y = a_y\Delta t$$

$$\Delta X = v_x\Delta t,\quad \Delta Y = v_y\Delta t$$

と表せるから

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{(X+v_x\Delta t)(v_y+a_y\Delta t) - (Y+v_y\Delta t)(v_x+a_x\Delta t)\} - \frac{1}{2}(Xv_y - Yv_x)$$

右辺を展開して整理し，Δt^2 に比例する項を無視すると

$$\Delta W = \frac{1}{2}(Xa_y - Ya_x)\Delta t$$

② 式より

$$a_x = -\frac{T}{m}\cos\theta = -\frac{T}{m}\frac{X}{r} = -\frac{T}{mr}X$$

$$a_y = -\frac{T}{m}\sin\theta = -\frac{T}{m}\frac{Y}{r} = -\frac{T}{mr}Y$$

であるから

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left\{X\left(-\frac{T}{mr}Y\right) - Y\left(-\frac{T}{mr}X\right)\right\}\Delta t = 0$$

(8)　物体 A ははじめ等速円運動をしていたから，(1) の結果より，面積速度 W_0 は

$$W_0 = \frac{v_0 r_0}{2}$$

① 式より　$v_0 = \sqrt{gr_0}$ であるから

$$W_0 = \frac{r_0\sqrt{gr_0}}{2} = \frac{\sqrt{gr_0^3}}{2}$$

円運動からずれて r_0 が r になったとき，面積速度 W は

$$W = \frac{1}{2}r^2\omega$$

と表されるが，面積速度は変化しないから　$W = W_0$

よって　$\dfrac{1}{2}r^2\omega = \dfrac{\sqrt{gr_0^3}}{2}$　　ゆえに　$\omega = \dfrac{\sqrt{gr_0^3}}{r^2}$

⑤ 式に代入すると

$$a_r = \frac{1}{2}\left\{r\left(\frac{\sqrt{gr_0^3}}{r^2}\right)^2 - g\right\} = \frac{g}{2}\left(\frac{r_0^3}{r^3} - 1\right)$$

$r = r_0 + \varepsilon$　として

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(r_0+\varepsilon)^3} = \frac{1}{r_0^3\left(1+\dfrac{\varepsilon}{r_0}\right)^3}$$

$\left|\dfrac{\varepsilon}{r_0}\right| \ll 1$　であるから　$\dfrac{1}{r^3} \fallingdotseq \dfrac{1}{r_0^3}\left(1 - 3\dfrac{\varepsilon}{r_0}\right)$

したがって

$$a_r \fallingdotseq \frac{g}{2}\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{r_0} - 1\right) = -\frac{3g}{2r_0}\varepsilon = -K(r - r_0)$$

ただし　$K = \dfrac{3g}{2r_0}$　(定数)

よって，観測者 C から見て，物体 A は線分 OA 上で $r = r_0$ の点を中心とした単振動をする。単振動の加速度の式「$a = -\omega^2 x$」より，K は求める角振動数 ω_r の 2 乗に等しいから

$\boldsymbol{\omega}_r{}^2=\dfrac{3g}{2r_0}$　ゆえに　$\boldsymbol{\omega}_r=\sqrt{\dfrac{3g}{2r_0}}$