

1.

図1のように地球を中心とする半径  $r$  [m] の円軌道上を回る人工衛星と、同一平面上の、それより大きい半径  $R$  [m] の円軌道上を同じ向きに回る宇宙ステーションの、ランデブー(出会い)について考えよう。万有引力定数を  $G[\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2]$ 、地球の質量を  $M[\text{kg}]$ 、人工衛星の質量を  $m[\text{kg}]$  として、次の問いに答えよ。ただし、地球のまわりを万有引力だけを受けて円運動やだ円運動する宇宙ステーションや人工衛星についても、惑星の運動に関するケプラーの法則と同じ法則が成り立つ。

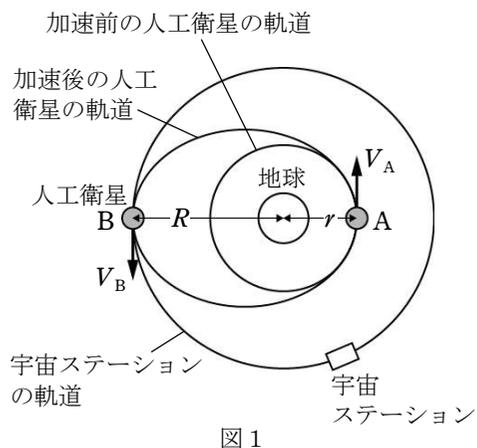


図1

- (1) 地球を中心とする半径  $r$  の円軌道上を回る人工衛星の速さ  $V_0$  [m/s] を求めよ。
- (2) この人工衛星の円運動の周期  $T_0$  [s] を求めよ。ただし解答に  $V_0$  を用いてはならない。

図1に示すように、点Aで、人工衛星の速さを  $V_0$  から、瞬時に加速して、 $V_A$  [m/s] にしたところ、人工衛星はABを長軸とするだ円軌道上を運動し、地球から最も遠ざかった点(点B)における速さは  $V_B$  [m/s] で、地球からの距離は  $R$  であった。

- (3) 人工衛星の力学的エネルギーが、点Aと点Bで等しいことを表す式を示せ。
- (4)  $V_B$  を  $V_A$ ,  $r$ ,  $R$  を用いて表せ。
- (5) (3)と(4)の結果より、 $V_B$  を消去して  $V_A$  を求め、 $G$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $r$  を用いて表せ。

(6) 比  $\frac{V_A}{V_0}$  を  $R$  と  $r$  だけを用いて表せ。

(7) 一般に、地球のまわりを、地球からの万有引力だけを受けて回る人工衛星または宇宙ステーションのだ円または円運動の周期の2乗は、その軌道の半長軸または半径の何乗に比例するか。

図1のだ円軌道上を運動する人工衛星の周期を  $T$  [s]、半径  $R$  の円軌道上を等速円運動する宇宙ステーションの周期を  $T_S$  [s] とする。

(8) 比  $\frac{T}{T_S}$  を  $R$  と  $r$  だけを用いて表せ。

人工衛星が地球から最も遠ざかった点Bに到達したとき、宇宙ステーションの位置は、図2の点Cであった。一般に、点Bと点Cは離れている。 $R > r$  であるから、(8)の結果より、人工衛星が図2のように、点Bから地球のまわりのだ円軌道上を1周してもとの点Bにもどってきたとき、宇宙ステーションはもとの点Cにはもどらず、その位置は、図2の点Dであった。地球の中心を点Oとして、角CODを  $\theta$  [rad] とする。

(9)  $\theta$  を  $T$ ,  $T_S$  だけを用いて表せ。

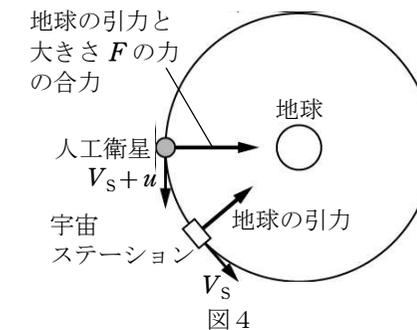
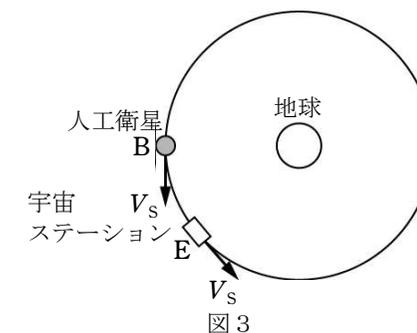
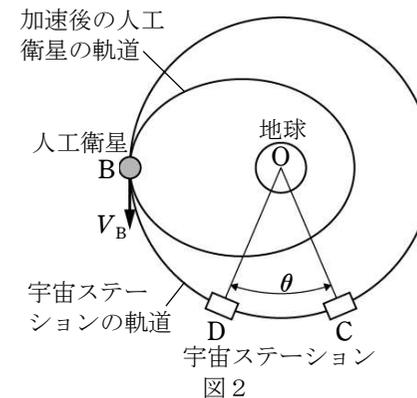
点Dと点Cを比べると、点Dのほうが点Bに近いので、人工衛星が、さらに地球のまわりを何回か回って点Bにもどってきたとき、宇宙ステーションは人工衛星にさらに接近し、その位置が図3の点Eであった。この時点で人工衛星を宇宙ステーションと同じ円軌道にのせよう。そのためには、人工衛星の速さを  $V_B$  から、宇宙ステーションと同じ速さ  $V_S$  [m/s] まで、瞬時に加速すればよい。

(10) 比  $\frac{V_S}{V_B}$  を  $R$  と  $r$  を用いて表せ。

こうして図3のように、人工衛星は、宇宙ステーションと同じ円軌道上を、同じ速さで回るようになった。しかし、まだ両者は離れている。これを近づけるには、人工衛星を加速すればよいように思えるが、加速したとたんに人工衛星の軌道は外側にずれてしまい、宇宙ステーションと出会うことができなくなる。そこで図4のように人工衛星の速さを、向きを変えずに  $V_S$  から  $V_S + u$  [m/s] に瞬時に加速した直後から、人工衛星に、地球の中心方向を向いた大きさ  $F$  [N] の力を加え続け、人工衛星が速さ  $V_S + u$  で、半径  $R$  の円軌道上を運動するようにする。

(11) 人工衛星に加え続けなければならない力の大きさ  $F$  を  $m$ ,  $u$ ,  $R$ ,  $V_S$  を用いて表せ。

人工衛星の速さは宇宙ステーションの速さより大きいので、ついには、両者は出会う。その瞬間に人工衛星の速さを  $V_S + u$  から  $V_S$  にもどし、同時に大きさ  $F$  の力を加えるこ



とをやめればよい。こうして、ランデヴー(出会い)は完了する。

- 【解答】 (1)  $\sqrt{\frac{GM}{r}}$  [m/s] (2)  $2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$  [s]  
 (3)  $\frac{1}{2}mV_A^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mV_B^2 - G\frac{Mm}{R}$  (4)  $\frac{r}{R}V_A$  [m/s]  
 (5)  $\sqrt{\frac{2GMR}{r(R+r)}}$  [m/s] (6)  $\sqrt{\frac{2R}{R+r}}$  (7) 3乗 (8)  $\left(\frac{R+r}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$   
 (9)  $2\pi\frac{T_s - T}{T_s}$  [rad] (10)  $\sqrt{\frac{R+r}{2r}}$  (11)  $\frac{m}{R}(2uV_s + u^2)$  [N]

2.

次の文中の各問いに答えよ。

ある点と物体を結ぶ線分が短い時間  $\Delta t$  の間に描く面積を  $\Delta S$  とするとき、 $W = \frac{\Delta S}{\Delta t}$  を物体のその点に関する面積速度という。惑星の太陽の位置に関する面積速度は一定であること(ケプラーの第二法則)が知られている。面積速度が一定となる他の例を調べてみる。

[A] 図1に示すように、点  $O$  と質量  $m$  の物体が伸び縮みしない糸で結ばれていて、物体は中心  $O$ 、半径  $l$  の円周上で速さ  $v$  の等速円運動をしている。

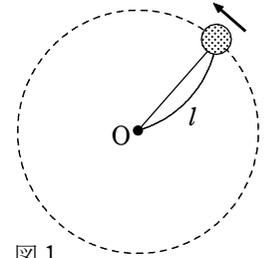


図1

- (1) 点  $O$  に関する物体の面積速度が、一定の値  $\frac{vl}{2}$  になることを説明せよ。  
 (2) この物体にはたらく遠心力とはどのようなもので、どういう場合に考える必要が生じるのかを説明せよ。

[B] 図2に示すように質量  $m$  の物体 A と物体 B は、ある水平でなめらかな平面上の点  $O$  に開けられた小さな穴を通る糸で互いにつながれている。糸は、細く表面がなめらかで質量が無視でき、伸び縮みせずゆるむことはないとする。物体 A はその水平な平面上を回転し、物体 B は鉛直方向に運動するとし、物体 A の運動する面内に  $x$  軸と  $y$  軸をとり、鉛直方向を  $z$  軸とする。糸の張力の大きさを  $T$ 、重力加速度の大きさを  $g$ 、 $OA$  の長さを  $r$ 、 $OA$  と  $x$  軸のなす角度を  $\theta$  とし、両物体とも点  $O$  に達することはないものとする。最初に物体 A が等速円運動をする場合を考える。

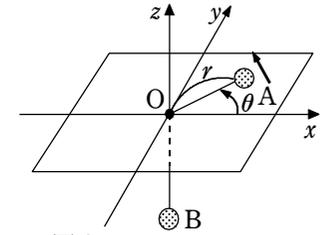


図2

- (3) 物体 A が、 $r=r_0$  の円周上で速さ  $v_0$  の等速円運動をしているとき、 $r_0$  は  $g$  と  $v_0$  だけを用いて表せることを説明し、 $r_0$  の表式を求めよ。

次に、 $r$  が一定とは限らない一般の場合を考える。

- (4) 物体 A の  $x$ 、 $y$  軸方向の加速度  $a_x$ 、 $a_y$  と物体 B の加速度  $b$  を  $T$  を用いて表せ。

点  $O$  にいて、物体 A と同じ角速度  $\omega$  で回転する観測者 C から見ると、物体 A にはたらく  $OA$  方向の慣性力は半径  $r$ 、角速度  $\omega$  の等速円運動の場合と同じになる。観測者 C から見た物体 A の  $OA$  方向の加速度を  $a_r$  とする。

- (5)  $a_r$  を  $m$ 、 $\omega$ 、 $T$ 、 $r$  だけを用いて表せ。

糸は伸び縮みしないので、物体 B の加速度  $b$  は加速度  $a_r$  に等しい。

- (6) (4) で求めた物体 B の加速度の式から  $T$  を求め、(5) の結果に代入し  $a_r$  を  $r$ 、 $g$ 、

$\omega$  だけを用いて表せ。

図3に示すように、ある時刻の物体Aの位置 $\vec{r}$ の $x$ ,  $y$ 座標を $X, Y$ , 速度 $\vec{v}$ の $x, y$ 成分を $v_x, v_y$ とすると、短い時間 $\Delta t$ の後には物体Aは点Dに達し、 $\theta$ は $\Delta\theta$ だけ変化する。OAが $\Delta t$ の間に描く面積を $\Delta S$ とすると、 $\Delta S$ は三角形OADの面積となるので、その時刻での物体Aの面積速度は $W = \frac{1}{2}(Xv_y - Yv_x)$ と表せる。

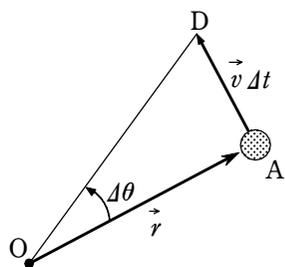


図3

(7) 短い時間 $\Delta t$ の間の $W$ の変化 $\Delta W$ は、(4)で求めた

物体Aの加速度の式を用い、 $\Delta t$ の2乗に比例する項を無視すると0となることを示せ。

(7)の結果より短い時間 $\Delta t$ に対してつねに $\frac{\Delta W}{\Delta t} = 0$ となり、 $W$ の値は一定で変化しないことがわかる。すなわち面積速度 $W$ が一定となることが示された。角速度

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \text{ OAの長さ } r \text{ を用いると, } W = \frac{1}{2}r^2\omega \text{ と表せる。}$$

物体Aは、(3)と同様、速さ $v_0$ 、半径 $r_0$ で点Oが中心の等速円運動をしていたが、ある時刻にOA方向にさらに別の力が短い時間はたらいて円運動から少しずれた運動を始めたとする。その際、面積速度 $W$ は、別の力のはたらく以前の等速円運動のときと等しい一定の値を保つ。それ以降、 $r$ の $r_0$ からのずれ $\varepsilon = r - r_0$ の絶対値は小さいとする。

(8)  $W$ が一定であることから、 $\omega$ を $r$ を用いて表せ。その結果を(6)の結果に代入し、 $\varepsilon$ の絶対値が小さいことを用いると、別の力のはたらいた後の物体Aは、観測者Cから見て、線分OA上で $r = r_0$ の点を中心とした単振動を示し、その角振動数を求めよ。ただし、 $\delta$ の絶対値が小さいとき $\frac{1}{(1+\delta)^n} \cong 1 - n\delta$ と近似できることを用いてよい。

物体にはたらく力が、ある点と物体を結ぶ直線の方をつねに向く場合、その点を力の中心という。一般に、そのような力だけが物体にはたらいている場合には物体の力の中心に関する面積速度が一定となることが知られている。[A]、[B]や惑星の運動は、この場合に当てはまる。

(5)  $r\omega^2 - \frac{T}{m}$     (6)  $\frac{r\omega^2 - g}{2}$     (7) 略

(8)  $\omega = \frac{\sqrt{gr_0^3}}{r^2}$ , 略, 角振動数:  $\sqrt{\frac{3g}{2r_0}}$

【解答】 [A](1) 略    (2) 略

[B](3)  $\frac{v_0^2}{g}$     (4)  $a_x = -\frac{T}{m}\cos\theta, a_y = -\frac{T}{m}\sin\theta, b = \frac{T}{m} - g$