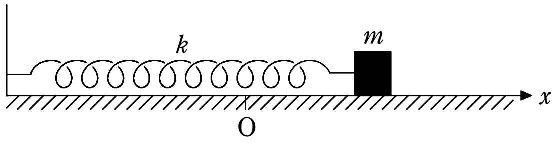
1．

ばね定数 k の軽いばねの一端に質量 m の小物体を取りつけ，あらい水平面上に置き，ばねの他端を壁に取りつけた。図のように x 軸をとり，ばねが自然の長さのときの小物体の位置を原点 O とする。ただし，重力加速度の大きさを g，小物体と水平面の間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とする。また，小物体は x 軸方向にのみ運動するものとする。



(1)　小物体を位置 x で静かにはなしたとき，小物体が静止したままであるような，位置 x の最大値 x_M を表す式として正しいものを，次の ①～⑦ のうちから1つ選べ。

$x_M = \boxed{\ 1\ }$

① $\dfrac{\mu mg}{2k}$　② $\dfrac{\mu mg}{k}$　③ $\dfrac{2\mu mg}{k}$　④ 0

⑤ $\dfrac{\mu' mg}{2k}$　⑥ $\dfrac{\mu' mg}{k}$　⑦ $\dfrac{2\mu' mg}{k}$

(2)　次の文章中の空欄 $\boxed{\ ア\ }$・$\boxed{\ イ\ }$ に入れる式の組合せとして正しいものを，下の ①～⑧ のうちから1つ選べ。$\boxed{\ 2\ }$

(1)の x_M より右側で小物体を静かにはなすと，小物体は動き始め，次に速度が0となったのは時間 t_1 が経過したときであった。この間に，小物体にはたらく力の水平成分 F は，小物体の位置を x とすると $F=-k(x-\boxed{\ ア\ })$ と表される。この力は，小物体に位置 $\boxed{\ ア\ }$ を中心とする単振動を生じさせる力と同じである。このことから，時間 t_1 は $\boxed{\ イ\ }$ とわかる。

	ア	イ
①	$\dfrac{\mu' mg}{2k}$	$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
②	$\dfrac{\mu' mg}{2k}$	$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
③	$\dfrac{\mu' mg}{2k}$	$\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
④	$\dfrac{\mu' mg}{2k}$	$2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
⑤	$\dfrac{\mu' mg}{k}$	$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
⑥	$\dfrac{\mu' mg}{k}$	$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
⑦	$\dfrac{\mu' mg}{k}$	$\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
⑧	$\dfrac{\mu' mg}{k}$	$2\pi\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

解答　(1) ②　　(2) ⑤

解説

(1) $x=x_M$ のとき静止摩擦力は最大摩擦力となる。小物体が水平面から受ける垂直抗力の大きさを N とすると，小物体が受ける力のつりあいの式は

水平方向　$-kx_M+\mu N=0$

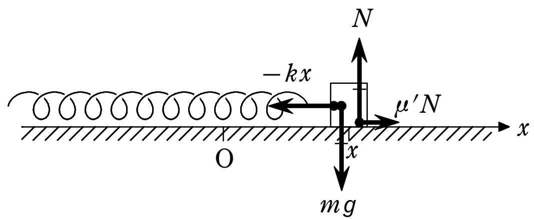
鉛直方向　$N-mg=0$

となる。2式より N を消去して整理すれば

$$x_M=\frac{\mu mg}{k}$$

以上より，正しいものは ②。

(2) この間に，ばねは縮んでいき小物体は左向きに運動する。図より，小物体にはたらく力の水平成分 F は



$$\begin{aligned}F&=-kx+\mu' N\\&=-kx+\mu' mg\end{aligned}$$

$$=-k\left(x-\frac{\mu' mg}{k}\right)$$

となる。ここで小物体の加速度を a とすれば，運動方程式「$ma=F$」より

$$a=-\frac{k}{m}\left(x-\frac{\mu' mg}{k}\right)$$

となるので，「$a=-\omega^2 x$」より単振動の角振動数 ω は $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ を満たす。小物体が動き始め，次に速度が 0 となるまでの時間 t_1 は単振動の $\dfrac{1}{2}$ 周期に等しく

$$t_1=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

以上より，正しいものは ⑤。

2．

〔A〕 天井に固定した長さ L の軽い糸に，質量 m の小球がつけてある。糸がたるまないように小球を持ち上げ，そっとはなしたところ，図1のように，小球は円弧を描きながら鉛直面内で振動を始めた。糸と鉛直線とのなす角を θ (ただし図1に示す鉛直線に対して右側を正とする)，重力加速度は鉛直下向きで大きさを g，円周率を π とする。次の問いに答えよ。

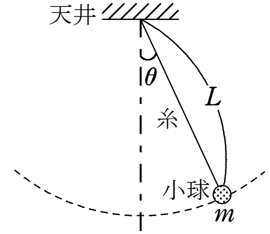


図1

(1) 円弧にそった向きの小球の加速度を a としたとき，円弧にそった向きの小球の運動方程式を m，a，g，θ を用いて表せ。ただし，a は図1で θ の増える向きを正とし，小球が鉛直線の右側にあるとして考えよ。

(2) 振動の振幅がきわめて小さいとき，振動は単振動とみなせる。このときの振動の周期 T を L と g を用いて表せ。

〔B〕 天井に固定した長さ L の軽い糸に，質量 m の小球がつけてある。小球を水平面内で反時計回りに等速円運動させたとき，図2のように，糸と鉛直線とのなす角が θ_0 となった。重力加速度は鉛直下向きで大きさを g，円周率を π とする。次の問いに答えよ。

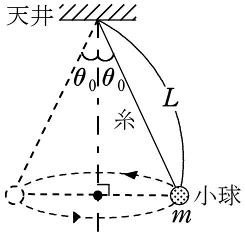


図2

(3) 小球の等速円運動の周期 T_0 を L，g，θ_0 を用いて表せ。

次に糸を，ばね定数が k，自然の長さが L の軽いばねに取りかえた。小球を水平面内で反時計回りに等速円運動させたとき，ばねが $\varDelta L$ 伸びて鉛直線とのなす角が θ_1 となり，角速度の大きさ ω が(3)と同じとなった。ばねの伸び $\varDelta L$ を求めたい。

(4) 小球にはたらくばねの弾性力の大きさ S を k と $\varDelta L$ を用いて表せ。

(5) 小球にはたらくばねの弾性力と遠心力の水平方向のつりあいの式を S，θ_1，m，L，$\varDelta L$，ω を用いて表せ。

(6) (4)，(5)の結果を用いて，ばねの伸び $\varDelta L$ を，m，g，k，L，θ_0 を用いて表せ。

〔C〕 鉛直方向に移動することのできるエレベーターが，下向きの一定加速度 (大きさ A) で動いている。このエレベーターの天井に固定した長さ L の軽い糸に，質量 m の小球がつけてある。小球を水平面内で反時計回りに等速円運動させたとき，図 3 のように，糸と鉛直線とのなす角が θ_2，小球と床との距離が H となった。小球はしばらく等速円運動した後，糸から離れた。円周率を π とし，A は重力加速度の大きさ g よりも小さいとする。次の問いに答えよ。

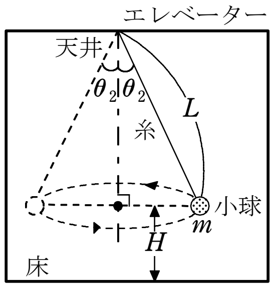


図 3

(7) 小球の等速円運動の周期 T_1 を L，g，A，θ_2 を用いて表せ。

小球は糸を離れてから水平方向に射出されたのち，床に落下した。

(8) 糸を離れた瞬間の小球の水平方向の速さを L，g，A，θ_2 を用いて表せ。

(9) 糸を離れてから床に落下するまでの時間を H，g，A を用いて表せ。

(10) 糸を離れてから床に落下するまでの水平方向に移動した距離を H，L，θ_2 を用いて表せ。

解答 〔A〕 (1) $ma=-mg\sin\theta$ (2) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

〔B〕 (3) $2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_0}{g}}$ (4) $k\varDelta L$ (5) $m(L+\varDelta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2-S\sin\theta_1=0$

(6) $\dfrac{mgL}{kL\cos\theta_0-mg}$

〔C〕 (7) $2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_2}{g-A}}$ (8) $\sqrt{\dfrac{(g-A)L}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$ (9) $\sqrt{\dfrac{2H}{g-A}}$

(10) $\sqrt{\dfrac{2HL}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$

解説

〔A〕(1) 小球にはたらく力は図 a のように，大きさ mg の重力と糸の張力である。円弧にそった向きの力の成分の大きさは $mg\sin\theta$ のみだから，運動方程式「$ma=F$」は，符号に注意して $\boldsymbol{ma=-mg\sin\theta}$

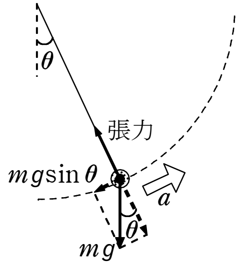


図 a

(2) 振幅がきわめて小さいときは，円弧にそった向きは水平方向とみなせる。水平方向の変位を x とし，

$\sin\theta\fallingdotseq\dfrac{x}{L}$ と近似して

$$ma=-mg\frac{x}{L}$$

となる。単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」より，角振動数は $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より $\boldsymbol{T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}}$

〔B〕(3) 小球にはたらく力は図 b の通り。この 2 力の合力が等速円運動の向心力となる。糸の張力の大きさを S_B とすると，鉛直方向の力のつりあいの式は

$S_B\cos\theta_0-mg=0$ よって $S_B=\dfrac{mg}{\cos\theta_0}$

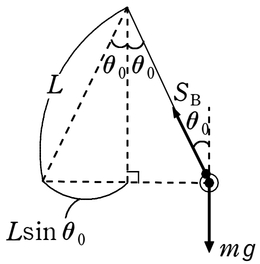


図 b

合力は糸の張力の水平成分となり

$S_B\sin\theta_0=mg\tan\theta_0$

等速円運動の加速度の式「$a=r\omega^2$」より，運動方程式「$ma=F$」は，角速度を ω として

$mL\sin\theta_0\cdot\omega^2=mg\tan\theta_0$

ゆえに $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta_0}}$ ……①

周期は $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_0}{g}}}$

(4)　フックの法則「$F=kx$」より

$S=k\varDelta L$

(5)　遠心力の大きさは，等速円運動の加速度の式「$a=r\omega^2$」より，$m(L+\varDelta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2$

図 c より，力のつりあいの式は

$m(L+\varDelta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2-S\sin\theta_1=0$

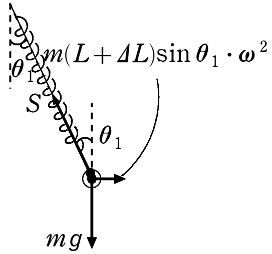


図 c

(6)　(4)，(5) より

$m(L+\varDelta L)\sin\theta_1\cdot\omega^2-k\varDelta L\sin\theta_1=0$

ω は ① 式と等しいので

$$m(L+\varDelta L)\frac{g}{L\cos\theta_0}-k\varDelta L=0$$

整理して　$\left(k-\dfrac{mg}{L\cos\theta_0}\right)\varDelta L=\dfrac{mg}{\cos\theta_0}$

よって　$\varDelta L=\dfrac{mgL}{kL\cos\theta_0-mg}$

〔C〕(7)　小球とともに運動する人から見ると，小球にはたらく力は，大きさ $mL\sin\theta_2\cdot\omega_1{}^2$ (ω_1 は角速度) の遠心力と大きさ mA の慣性力を加え，図 d のようになる。糸の張力の大きさを S_C とすると，水平，鉛直方向の力のつりあいはそれぞれ

$mL\sin\theta_2\cdot\omega_1{}^2-S_C\sin\theta_2=0$　……②

$S_C\cos\theta_2+mA-mg=0$

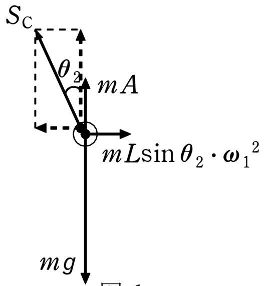


図 d

よって　$S_C=\dfrac{m(g-A)}{\cos\theta_2}$

② 式に代入して　$mL\omega_1{}^2=\dfrac{m(g-A)}{\cos\theta_2}$

ゆえに　$\omega_1=\sqrt{\dfrac{g-A}{L\cos\theta_2}}$

周期の式「$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$」より　$T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta_2}{g-A}}$

(8)　等速円運動のときの速さに等しい。円運動の速さの式「$v=r\omega$」より

$$L\sin\theta_2\cdot\omega_1=L\sin\theta_2\sqrt{\frac{g-A}{L\cos\theta_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(g-A)L}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$$

(9)　落下している小球にはたらく力は図 e の通り。加速度を α' とすると，運動方程式「$ma=F$」は

$m\alpha'=mg-mA$

よって

$\alpha'=g-A$

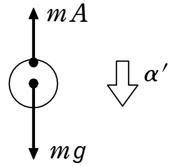


図 e

求める時間を t とすると，等加速度直線運動の式

「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」より

$H=\dfrac{1}{2}(g-A)t^2$　ゆえに　$t=\sqrt{\dfrac{2H}{g-A}}$

(10)　水平方向は等速直線運動なので，「$x=vt$」より

$$\sqrt{\frac{(g-A)L}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2\times\sqrt{\frac{2H}{g-A}}=\sqrt{\frac{2HL}{\cos\theta_2}}\sin\theta_2$$