１.

図 1 のように，なめらかな水平面上に同じ質量 m をもつ小球 1 と小球 2 がばね定数 k，自然の長さ L の一様なばねでつながれて x 軸にそって置かれている。

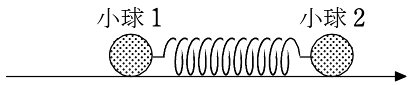


図 1

小球は x 軸方向にのみ運動できる。小球の大きさ，ばねの質量，および空気抵抗はないものとする。【実験 1】，【実験 2】，【実験 3】の条件の下での小球の運動について，次の問いに答えよ。

【実験 1】ばねを自然の長さから Δx $(0<\Delta x<L)$ だけ押し縮めた状態で小球を静止させた。小球 1 を固定したままで，小球 2 から静かに手をはなすと，小球 2 は単振動を始めた。

(1) この単振動の周期 T を求めよ。

【実験 2】ばねを自然の長さから Δx $(0<\Delta x<L)$ だけ押し縮めた状態で小球を静止させた。小球 1 と小球 2 の両方から同時に静かに手をはなすと，2 つの小球の中点 (重心) は静止したままで，2 つの小球は重心に対して左右対称に，それぞれ振幅 $\dfrac{\Delta x}{2}$ の単振動をした。

(2) ばねが自然の長さになったときに小球の速さは最大となった。この速さを $v_{\max}$ とする。このときの単振動の周期を T' として，$v_{\max}$ を Δx と T' を用いて表せ。

(3) エネルギー保存の法則から $v_{\max}$ を求めよ。

(4) (2)，(3) の結果より，T' は T の何倍かを求めよ。

【実験 3】図 2 に示すように，小球 1 が位置 $x=0$ の壁に接した状態で，小球 2 に力を加えてばねを自然の長さから Δx $(0<\Delta x<L)$ だけ押し縮めて静止させ，時刻 $t=0$ のとき小球 2 から静かに手をはなした。

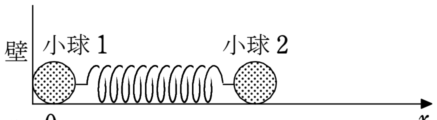


図 2

(5) 小球 1 が壁を離れる時刻と，そのときの小球 2 の速度 v_0 を求めよ。

小球 1 が壁を離れた後，2 つの小球の重心は等速度運動をする。重心と同じ速度で等速度運動をする観測者から見た小球 1 と小球 2 の運動は【実験 2】の場合と同様で，重心に対して左右対称に周期 T' の単振動をする。ただし，単振動の振幅は【実験 2】の場合とは異なる。

(6) ばねの長さが最大となったとき，小球 1 と小球 2 の速度は等しい。運動量保存の法則を用いてこの速度を求め，v_0 を用いて表せ。また，このときのばねの長さをエネルギー保存の法則を用いて求めよ。

(7) 小球 1 が壁を離れた後に，ばねの長さが一度最大になってから自然の長さにもどったときの時刻 t_1 を T，T' を用いて表せ。また，重心の速度は (6) で求めた小球 1 および小球 2 の速度に等しいことに注意して，時刻 $t=t_1$ のときの小球 1 の位置を求めよ。

(8) 時刻 $t=t_1$ のときの小球 1 と小球 2 それぞれの速度を求めよ。

解答 (1) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(2) $\dfrac{\pi\Delta x}{T'}$　(3) $\Delta x\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍

(5) 時刻：$\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，速度：$\Delta x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(6) 速度：$\dfrac{v_0}{2}$，ばねの長さ：$L+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta x$

(7) 時刻 t_1：$\dfrac{T}{4}+\dfrac{T'}{2}$，位置：$\dfrac{1}{4}v_0T'\left(=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\Delta x\right)$

(8) 小球 1：$\Delta x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，小球 2：0

解説

(1) 小球 2 の，自然の長さからの変位を x として，運動方程式を立てると

$$ma=-kx \qquad a=-\frac{k}{m}x$$

となり，角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ とわかる。

(2) $v_{\max}=$(振幅)×(角振動数) の関係があるから，このときの角振動数を ω' として

$$v_{\max}=\frac{\Delta x}{2}\omega'=\frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{2\pi}{T'}=\frac{\pi\Delta x}{T'}$$

(3) 重心が静止していて，重心に対して左右対称に運動するという条件から，2 つの小球の速さは常に等しい。よって，次式が成りたつ。

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2=\frac{1}{2}mv_{\max}{}^2+\frac{1}{2}mv_{\max}{}^2$$

よって　$v_{\max}=\Delta x\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

(4) (2)，(3) の結果より

$$\frac{\pi\Delta x}{T'}=\Delta x\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

$$T'=\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

よって　$\dfrac{T'}{T}=\dfrac{\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍

参考　重心の位置でばねを切り，そこに棒をとりつけた図 a のような運動と同じになる。このとき，ばね定数は $k\to 2k$ になるので，(1) より $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になるとわかる。

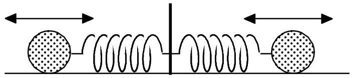


図 a

(5)　再び自然の長さになった直後，小球 1 に図 2 の右向きに弾性力がはたらくようになるので，小球 1 は壁を離れる。それまでは，(1) のときと同様に考えられるので，求める時刻 t_0 は

$$t_0=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる。またこのときの速さは最大となるので，(2) と同様に考えて

$$v_0=\Delta x\times\omega=\Delta x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(6)　運動量が保存することを用いる。ばねの長さが最大のときの速度を v' とすると

$$m\cdot 0+mv_0=mv'+mv'$$

よって　$v'=\dfrac{v_0}{2}$　…… ①

また，このとき，系の力学的エネルギーは保存するから，ばねの最大の伸びを $\Delta x'$ とすると

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}k(\Delta x')^2$$

① 式より

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{8}mv_0{}^2+\frac{1}{8}mv_0{}^2+\frac{1}{2}k(\Delta x')^2$$

整理すると

$$\Delta x'=\sqrt{\frac{m}{2k}}\,v_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta x$$

よって，求めるばねの長さは　$L+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Delta x$

(7)　壁を離れた直後の自然の長さの状態から，次に自然の長さにもどるまでの時間は，その単振動の半周期に対応する。ゆえに

$$t_1=t_0+\frac{T'}{2}=\frac{T}{4}+\frac{T'}{2}$$

この半周期の間，重心 (この場合は 2 つの小球の中点) は等速直線運動している (図 b)。

図より，求める小球 1 の位置 x_1 は

$$x_1=\frac{v_0}{2}(t_1-t_0)=\frac{1}{4}v_0T'$$

$$\left(=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\Delta x\right)$$

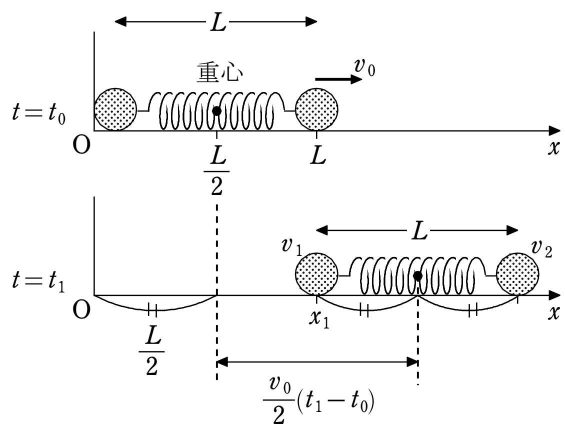


図 b

(8)　この半周期の間，2 つの小球の運動量と力学的エネルギーはともに保存する。$t=t_1$ における小球 1 と小球 2 の速度を v_1，v_2 とすると，次の 2 式が成りたつ。

$$\begin{cases} m\cdot 0+mv_0=mv_1+mv_2 & \cdots\cdots ② \\ \dfrac{1}{2}m\cdot 0^2+\dfrac{1}{2}mv_0{}^2=\dfrac{1}{2}mv_1{}^2+\dfrac{1}{2}mv_2{}^2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

2 式を変形して

$$\begin{cases} v_0{}^2=v_1{}^2+2v_1v_2+v_2{}^2 & \cdots\cdots ②' \\ v_0{}^2=v_1{}^2+v_2{}^2 & \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

よって　$v_1v_2=0$

$v_1=0$ は $t=t_0$ の場合なので　$v_2=0$

② 式に代入して，$v_1=v_0=\Delta x\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

別解　この間を，2 つの小球の弾性衝突とみなすことができる。

さらに，質量が等しいので，速度交換が起こる。よって　$v_1=v_0$　$v_2=0$

参考　この運動を速度–時刻グラフに表すと，図 c のようになる。

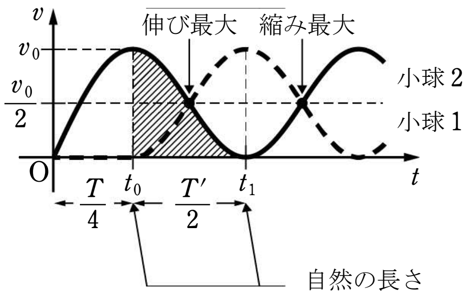


図 c

ちなみに，斜線部の面積が (7) で求めた x_1 に対応する。図形的にも，四角形の面積として求められることがわかる。

２．

空所を埋め，問いに答えよ。

〔A〕 静止したエレベーターの中で，質量 m の小球を長さ l の軽くて伸びない糸でつるして静止させた。重力加速度の大きさを g とする。

(1) 糸の張力の大きさ S_0 を求めよ。

次に，鉛直面内で，この小球に半径 l の円周上で微小な振動を行わせる。図 1 のように，糸が鉛直線と角 θ をなすときの小球の位置を P とする。小球の最下点を O とし，$\overset{\frown}{\mathrm{OP}}=x$ とする。ただし，小球が図 1 の O の左側にあるときには，θ，x とも負とする。

(2) 小球にはたらく重力について，大きさと向きに注意して軌道に対して接線方向の成分を図に矢印で示せ。また，その大きさ $\boxed{\text{ア}}$ を答えよ。

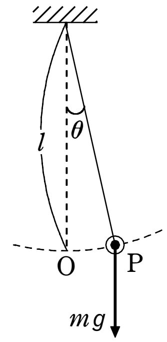


図 1

微小振動の場合，小球は水平な直線上を運動しているとみなすことができる。小球の加速度を，右向きを正として，a と表す。

この小球の運動方程式は，$ma=-$(ア) である。図 1 より $\sin\theta \fallingdotseq \theta = \boxed{\text{イ}}$ であるから $a \fallingdotseq \boxed{\text{ウ}} \times x$ となる。このことから，小球の運動は，角振動数が $\boxed{\text{エ}}$ の単振動で，周期は $\dfrac{2\pi}{(\text{エ})}$ となることがわかる。

〔B〕 静止したエレベーターの中で，ばね定数 k の軽いばねでこの小球を天井からつるした。図 2 のように自然の長さから $x_0\,(>0)$ 伸びてつりあった。ばねの自然の長さのときの小球の位置を原点とし，鉛直上向きに x 軸をとる。

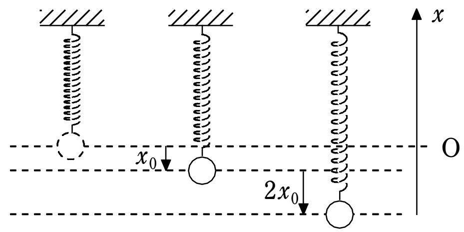


図 2

(3) x_0 を求めよ。

小球を上下に振動させると単振動を行う。この小球が位置 x にあるとき，重力による位置エネルギー ($x=0$ を基準点とする) と，ばねの弾性力による位置エネルギーの和を $U(x)$ とする。

(4) $U(x)=\dfrac{1}{2}k\{(x+x_0)^2-x_0{}^2\}$ となることを示せ。

$U(x)$ のグラフは図 3 のような放物線となる。このことから小球は ($x=-x_0$) を中心とする単振動を行うことがわかる。

小球をつりあいの位置から下方へ $2x_0$ 引き下げ，静かにはなすと，小球は振幅 $\boxed{\text{オ}}$ の単振動を行う。つりあいの位置を通る瞬間の小球の速さを v_0 とする。$\boxed{\text{カ}}$ の法則より

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2+U(-x_0)=U(-3x_0)\quad(=U(x_0))$$

が成りたつ。

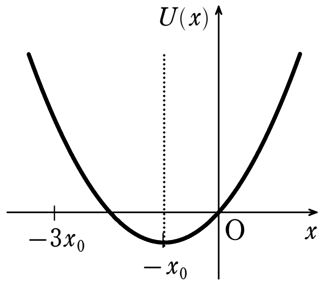


図3

(5)　k，m，x_0 を用いて v_0 を求めよ。

単振動では，v_0 は(角振動数)×(振幅) となるので，小球の運動は角振動数が $\boxed{\text{キ}}$ の単振動である。

〔C〕　一定の大きさの加速度 b で上昇しているエレベーターの中で〔A〕の現象について再び考えてみよう。まず，小球が最下点 O で静止している場合を考える。エレベーターの外からこの小球を見ると，小球は加速度の大きさ b で上昇している。

(6)　糸の張力の大きさを S_1 として，運動方程式から S_1 を求めよ。

エレベーターが静止していたときと比べて，糸の張力の大きさは $\boxed{\text{ク}}$ 倍となる。これは，重力加速度の大きさ g が (ク) 倍となったためとみなせるからである。

〔A〕で考察した単振り子の周期が変化した。その理由を考えてみよう。〔A〕で求めた周期を T_0 とし，エレベーターが加速度の大きさ b で上昇しているときの周期を T とする。

(7)　エレベーターの加速度の大きさ b を T_0，T，g を用いて表せ。

(8)　〔B〕で考察した鉛直ばねの場合，周期の変化を測定することでは，エレベーターの加速度の大きさ b を求めることができない。その理由を簡潔に説明せよ。

解答　(1)　mg

(2)　(ア)　$mg\sin\theta$，〔図の白矢印〕　(イ)　$\dfrac{x}{l}$

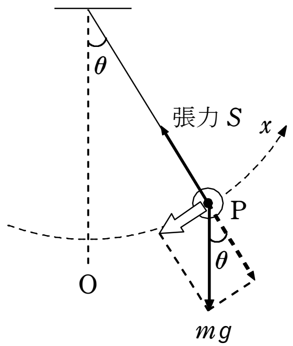
(ウ)　$-\dfrac{g}{l}$　(エ)　$\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

(3)　$\dfrac{mg}{k}$

(4)　省略　(オ)　$2x_0$

(カ)　力学的エネルギー保存

(5)　$2x_0\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　(キ)　$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$



(6)　$m(g+b)$　(ク)　$1+\dfrac{b}{g}$　(7)　$\left(\dfrac{T_0{}^2}{T^2}-1\right)g$　(8)　省略

解説

〔A〕(1)　小球における力のつりあいより

$S_0-mg=0$　よって　$S_0=mg$

(2)　点 P にある小球にはたらく力を図示すると，図 a のようになる。

(ア)　図 a の ⇦ が求める答え。大きさは

$mg\sin\theta$

(イ)　扇形の弧の長さを L，半径を r，角度を θ とすると，「$L=r\theta$」の関係があるから

$x=l\theta$　よって　$\theta=\dfrac{x}{l}$

(ウ)　このとき，小球の運動方程式を立てると

$ma=-mg\sin\theta$

微小振動ゆえ $\sin\theta\fallingdotseq\theta$ と近似できるので

$ma\fallingdotseq-mg\theta$

(イ) より　$-mg\theta=-mg\dfrac{x}{l}$

よって　$a\fallingdotseq-\dfrac{g}{l}\times x$

(エ)　角振動数 ω_0 は $a=-\omega_0{}^2x$ より　$\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

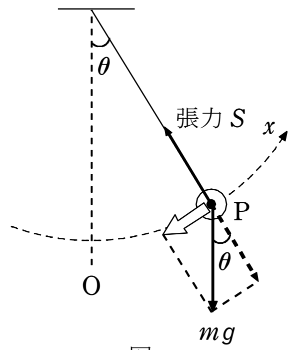


図 a

〔B〕(3)　小球にはたらく力のつりあいより

$kx_0-mg=0$　よって　$x_0=\dfrac{mg}{k}$

(4)　重力による位置エネルギーの基準に注意し，(3) を用いる。

$$\begin{aligned}U(x)&=mgx+\frac{1}{2}kx^2=kx_0\cdot x+\frac{1}{2}kx^2\\&=\frac{1}{2}kx(x+2x_0)\\&=\frac{1}{2}k\{(x+x_0)-x_0\}\{(x+x_0)+x_0\}\\&=\frac{1}{2}k\{(x+x_0)^2-x_0{}^2\}\end{aligned}$$

(オ)　振動の中心は $x=-x_0$ だから，振幅 A は

$$A=|(-3x_0)-(-x_0)|=\boldsymbol{2x_0}$$

（カ） **力学的エネルギー保存**

(5) 力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+U(-x_0)=U(x_0)$$

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{1}{2}k{x_0}^2=\frac{1}{2}k\cdot 3{x_0}^2$$

よって　$v_0=\boldsymbol{2x_0\sqrt{\frac{k}{m}}}$

（キ） 振動の中心を通るときの速さ v_0 が最も速く，角振動数を $\boldsymbol{\omega}$ とすれば，「$v_0=A\boldsymbol{\omega}$」と表されるので，(5) の結果を用いて

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{v_0}{A}=\frac{v_0}{2x_0}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

〔C〕(6) 鉛直上向きを正の向きとして，エレベーターの外(慣性系)から見たときの運動方程式は

$$mb=S_1-mg$$

よって

$$S_1=\boldsymbol{m(g+b)}$$

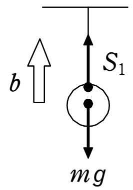


図 b

（ク） (1)，(6) より　$\dfrac{S_1}{S_0}=\dfrac{m(g+b)}{mg}=\boldsymbol{1+\dfrac{b}{g}}$ 〔倍〕

(7) このとき，エレベーターの中から見ると，重力加速度の大きさが $g+b$ に変化したとみなせる。あとは〔A〕と同様に考えると，角振動数 $\boldsymbol{\omega}_1$ は $\boldsymbol{\omega}_1=\sqrt{\dfrac{g+b}{l}}$ となるので

$$\frac{T}{T_0}=\frac{2\pi/\boldsymbol{\omega}_1}{2\pi/\boldsymbol{\omega}_0}=\frac{\boldsymbol{\omega}_0}{\boldsymbol{\omega}_1}=\frac{\sqrt{g/l}}{\sqrt{(g+b)/l}}=\sqrt{\frac{g}{g+b}}$$

よって　$(g+b)T^2=g{T_0}^2$

ゆえに　$b=\boldsymbol{\left(\dfrac{{T_0}^2}{T^2}-1\right)g}$

(8) 単振り子の場合，(エ) からわかるように，周期が重力加速度の大きさに依存する。一方，鉛直ばね振り子の場合，(キ) から，小球の質量とばね定数だけで周期が決まり，重力加速度の大きさは周期に関係しない。そのため，みかけの重力加速度がエレベーターの加速度に依存して変化したとしても，その効果を周期の測定からは読み取ることはできない。