1．

図１のように，なめらかな水平面上に同じ質量 m をもつ小球１と小球２がばね定数 k，自然の長さ L の一様なばねでつながれて x 軸にそって置かれている。

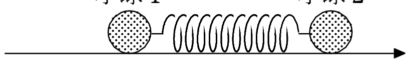

図１

小球は x 軸方向にのみ運動できる。小球の大きさ，ばねの質量，および空気抵抗はないものとする。【実験 1】，【実験 2】，【実験 3】の条件の下での小球の運動について，次の問いに答えよ。

【実験 1】ばねを自然の長さから $\Delta x\,(0<\Delta x<L)$ だけ押し縮めた状態で小球を静止させた。小球１を固定したままで，小球２から静かに手をはなすと，小球２は単振動を始めた。

(1)　この単振動の周期 T を求めよ。

【実験 2】ばねを自然の長さから $\Delta x\,(0<\Delta x<L)$ だけ押し縮めた状態で小球を静止させた。小球１と小球２の両方から同時に静かに手をはなすと，２つの小球の中点 (重心) は静止したままで，２つの小球は重心に対して左右対称に，それぞれ振幅 $\dfrac{\Delta x}{2}$ の単振動をした。

(2)　ばねが自然の長さになったときに小球の速さは最大となった。この速さを v_{max} とする。このときの単振動の周期を T' として，v_{max} を Δx と T' を用いて表せ。

(3)　エネルギー保存の法則から v_{max} を求めよ。

(4)　(2), (3) の結果より，T' は T の何倍かを求めよ。

【実験 3】図２に示すように，小球１が位置 $x=0$ の壁に接した状態で，小球２に力を加えてばねを自然の長さから Δx $(0<\Delta x<L)$ だけ押し縮めて静止させ，時刻 $t=0$ のとき小球２から静かに手をはなした。

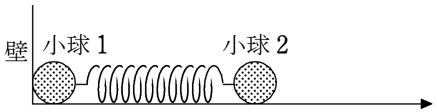

図２

(5)　小球１が壁を離れる時刻と，そのときの小球２の速度 v_0 を求めよ。

小球１が壁を離れた後，２つの小球の重心は等速度運動をする。重心と同じ速度で等速度運動をする観測者から見た小球１と小球２の運動は【実験 2】の場合と同様で，重心に対して左右対称に周期 T' の単振動をする。ただし，単振動の振幅は【実験 2】の場合とは異なる。

(6)　ばねの長さが最大となったとき，小球１と小球２の速度は等しい。運動量保存の法則を用いてこの速度を求め，v_0 を用いて表せ。また，このときのばねの長さをエネルギー保存の法則を用いて求めよ。

(7)　小球１が壁を離れた後に，ばねの長さが一度最大になってから自然の長さにもどったときの時刻 t_1 を T，T' を用いて表せ。また，重心の速度は (6) で求めた小球１および小球２の速度に等しいことに注意して，時刻 $t=t_1$ のときの小球１の位置を求めよ。

(8)　時刻 $t=t_1$ のときの小球１と小球２それぞれの速度を求めよ。

2．

空所を埋め，問いに答えよ。

〔A〕　静止したエレベーターの中で，質量 m の小球を長さ l の軽くて伸びない糸でつるして静止させた。重力加速度の大きさを g とする。

(1)　糸の張力の大きさ S_0 を求めよ。

次に，鉛直面内で，この小球に半径 l の円周上で微小な振動を行わせる。図1のように，糸が鉛直線と角 θ をなすときの小球の位置を P とする。小球の最下点を O とし，$\overset{\frown}{\mathrm{OP}}=x$ とする。ただし，小球が図1の O の左側にあるときには，θ，x とも負とする。

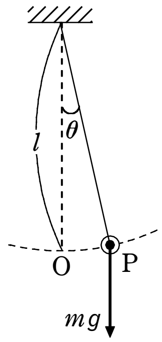

図1

(2)　小球にはたらく重力について，大きさと向きに注意して軌道に対して接線方向の成分を図に矢印で示せ。また，その大きさ $\boxed{\text{ア}}$ を答えよ。

微小振動の場合，小球は水平な直線上を運動しているとみなすことができる。小球の加速度を，右向きを正として，a と表す。

この小球の運動方程式は，$ma=-(\text{ア})$ である。図1より $\sin\theta \fallingdotseq \theta = \boxed{\text{イ}}$ であるから $a \fallingdotseq \boxed{\text{ウ}} \times x$ となる。このことから，小球の運動は，角振動数が $\boxed{\text{エ}}$ の単振動で，周期は $\dfrac{2\pi}{(\text{エ})}$ となることがわかる。

〔B〕　静止したエレベーターの中で，ばね定数 k の軽いばねでこの小球を天井からつるした。図2のように自然の長さから $x_0\,(>0)$ 伸びてつりあった。ばねの自然の長さのときの小球の位置を原点とし，鉛直上向きに x 軸をとる。

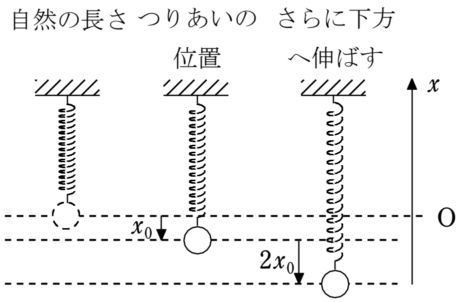

図2

(3)　x_0 を求めよ。

小球を上下に振動させると単振動を行う。この小球が位置 x にあるとき，重力による位置エネルギー ($x=0$ を基準点とする) と，ばねの弾性力による位置エネルギーの和を $U(x)$ とする。

(4)　$U(x)=\dfrac{1}{2}k\{(x+x_0)^2-{x_0}^2\}$ となることを示せ。

$U(x)$ のグラフは図3のような放物線となる。このことから小球は $(x=-x_0)$ を中心とする単振動を行うことがわかる。

小球をつりあいの位置から下方へ $2x_0$ 引き下げ，静かにはなすと，小球は振幅 $\boxed{\text{オ}}$ の単振動を行う。つりあいの位置を通る瞬間の小球の速さを v_0 とする。$\boxed{\text{カ}}$ の法則より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+U(-x_0)=U(-3x_0)\quad(=U(x_0))$$

が成りたつ。

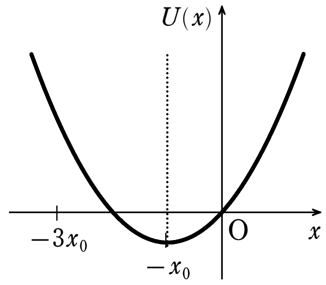

図3

(5)　k，m，x_0 を用いて v_0 を求めよ。

単振動では，v_0 は (角振動数)×(振幅) となるので，小球の運動は角振動数が $\boxed{\text{キ}}$ の単振動である。

〔C〕　一定の大きさの加速度 b で上昇しているエレベーターの中で〔A〕の現象について再び考えてみよう。まず，小球が最下点 O で静止している場合を考える。エレベーターの外からこの小球を見ると，小球は加速度の大きさ b で上昇している。

(6)　糸の張力の大きさを S_1 として，運動方程式から S_1 を求めよ。

エレベーターが静止していたときと比べて，糸の張力の大きさは $\boxed{\text{ク}}$ 倍となる。これは，重力加速度の大きさ g が (ク) 倍となったためとみなせるからである。

〔A〕で考察した単振り子の周期が変化した。その理由を考えてみよう。〔A〕で求めた周期を T_0 とし，エレベーターが加速度の大きさ b で上昇しているときの周期を T とする。

(7)　エレベーターの加速度の大きさ b を T_0，T，g を用いて表せ。

(8)　〔B〕で考察した鉛直ばねの場合，周期の変化を測定することでは，エレベーターの加速度の大きさ b を求めることができない。その理由を簡潔に説明せよ。