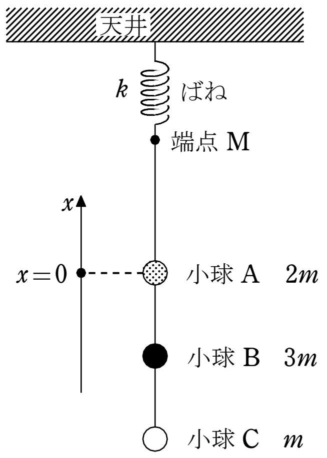
1．

次の文章を読み，$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{コ}}$に適切な数式あるいは数値を入れよ。また，$\boxed{\text{い}}$〜$\boxed{\text{は}}$には指定された選択肢から最も適切なものを選べ。数字以外の文字定数としては m，k，g，π のみを用いること。角度はラジアンを単位として表すものとする。重力加速度の大きさは g とする。



図のように，ばね定数 k のばねの一端を天井に固定し，鉛直方向にぶら下げた。ばねのもう一方の端点 M から糸をたらし，その先に質量 $2m$ の小球 A，質量 $3m$ の小球 B，および質量 m の小球 C を，順に糸を用いてぶら下げた。以下では，3つの小球は鉛直方向にのみ運動し，端点 M から小球 A までの糸の長さは十分長いので，ばねと小球 A は接触しないものとする。また，ばねと糸の質量，および糸の伸縮は無視できるとし，糸と小球に対する空気抵抗もないものとする。

つりあい状態では，図のように小球 A，小球 B，小球 C は静止しており，このときの小球 A の位置を x 軸の原点 $(x=0)$ とし，図の鉛直上向きを正とする。

(1)　小球 A，小球 B，小球 C が静止したこのつりあい状態におけるばねの自然の長さからの伸びは $\boxed{\text{ア}}$ と表すことができる。時刻 0 において，小球 B と小球 C の間で糸を切ると，原点で静止していた小球 A は，小球 B とともに単振動を始めた。糸を切った後に振動する小球 A の角振動数は $\boxed{\text{イ}}$ であり，これは小球 B の角振動数と同じであった。このときの小球 A の振動の中心の位置は $\boxed{\text{ウ}}$ である。小球 A が振動運動をして再び原点にもどってくる時刻 t_1 は $\boxed{\text{エ}}$ となる。

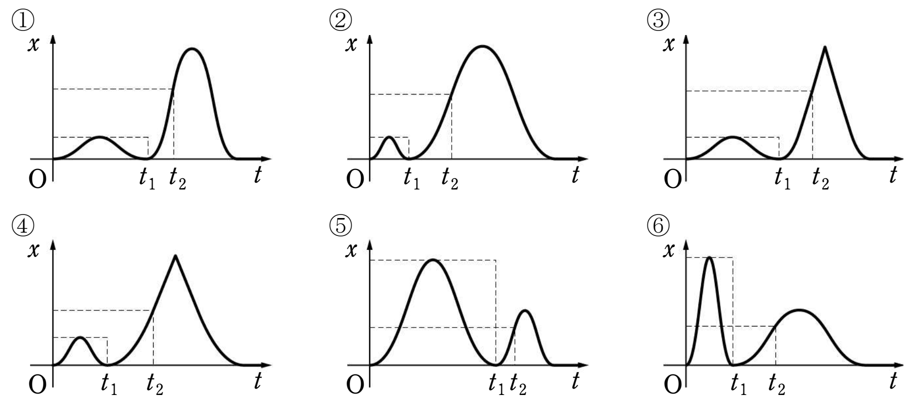
(2)　時刻 t_1 に小球 A が原点にもどってきた瞬間に，今度は小球 A と小球 B の間の糸を切った。その後，小球 A は単振動を始めるが，小球 A の新たな振動の中心の位置は $\boxed{\text{オ}}$ である。時刻 t_1 以降で最初に位置（オ）を通過するのは時刻 $t_1+\boxed{\text{カ}}$ である。小球 A が新たな振動の中心を通過するとき，$\boxed{\text{い}}$ より小球 A の速さは $\boxed{\text{キ}}$ であることがわかる。

(3)　小球 A と小球 B の間の糸が切られた後，小球 A はばねに引かれて上昇する。小球 A がばねの自然の長さからの伸びが 0 となる点 P に到達した瞬間に，ばねの復元力は 0 となり，ばねの端点 M は静止した。一方，小球 A は上昇を続け，端点 M と小球 A の間の糸がたるみ始めた。糸がたるみ始めた瞬間の時刻 t_2 における小球 A の速さは $\boxed{\text{ク}}$ である。

(4)　小球 A は，時刻 t_2 以降も重力を受けながら上昇を続けた。点 P より $\boxed{\text{ケ}}$ だけ高い点で小球 A の速度は 0 となり，その後小球 A は下降を開始し，再び点 P にもどったのは時刻 $t_2+\boxed{\text{コ}}$ であった。点 P にもどった小球 A は，ばねを引き伸ばしながら下降を続け，やがて速度は 0 となり，再び上昇を始めた。これ以後，小球 A は単振動と等加速度運動を組み合わせた運動を周期的にくり返した。時刻 0 以降の小球 A の位置 x と時刻 t のグラフは $\boxed{\text{ろ}}$ のようになる。また，時刻 t_1 以降の小球 A の運動の周期は $(\boxed{\text{は}})\times\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である。

$\boxed{\text{い}}$ に対する選択肢

① 力学的エネルギー保存の法則　② 質量保存の法則
③ 慣性の法則　④ 面積速度一定の法則
⑤ ガウスの法則　⑥ 作用・反作用の法則



$\boxed{\text{は}}$ に対する選択肢

① $2\pi+2\sqrt{6}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+2\sqrt{6}$　③ $\dfrac{8}{7}\pi+2$　④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi+2$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi+2$　⑥ $\dfrac{1}{5}\pi+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$　⑦ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}\pi+\dfrac{4}{9}$　⑧ $\dfrac{3\sqrt{2}}{9}+2$

⑨ $\dfrac{2}{7}\pi+2$　⑩ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi+2\sqrt{6}$

解答　(1)（ア）$\dfrac{6mg}{k}$　（イ）$\sqrt{\dfrac{k}{5m}}$　（ウ）$\dfrac{mg}{k}$　（エ）$2\pi\sqrt{\dfrac{5m}{k}}$

(2)（オ）$\dfrac{4mg}{k}$　（カ）$\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$　（い）①　（キ）$2g\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

(3) (ク)　$g\sqrt{\dfrac{6m}{k}}$

(4) (ケ)　$\dfrac{3mg}{k}$　　(コ)　$2\sqrt{\dfrac{6m}{k}}$　　(ろ)　①　　(は)　⑩

解説

(1)(ア)　つりあいの状態では，3 つの小球を 1 つの物体とみなせる。伸びを d として

$$kd=6mg \qquad d=\frac{6mg}{k}$$

(イ)　糸を切った後，小球 A と B が 1 つにみなせる場合，位置 x での運動方程式を立てると，加速度を a として

$$5ma=k(d-x)-5mg$$
$$5ma=-kx+mg$$
$$a=-\frac{k}{5m}\left(x-\frac{mg}{k}\right)$$

となり，角振動数 ω_1 は　$\sqrt{\dfrac{k}{5m}}$

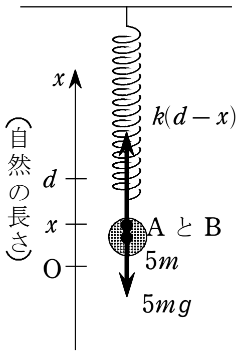


図 a

(ウ)　(イ) より，振動の中心の位置 x_1 は　$\dfrac{mg}{k}$

(エ)　(イ) より　$t_1=2\pi\sqrt{\dfrac{5m}{k}}$

(2)(オ)　(イ) において，質量を $5m$ から $2m$ に変えればよく

$$2ma=k(d-x)-2mg$$
$$a=-\frac{k}{2m}\left(x-\frac{4mg}{k}\right) \qquad \left(\omega=\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)$$

となり，中心の位置 x_2 は　$\dfrac{4mg}{k}$

(カ)　(オ) より，このときの周期は　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$

だから，求める時刻は

$$t_1+\frac{T}{4}=t_1+\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

(い)　この間，力学的エネルギーは保存する。よって，①。

(キ)　(い) より，求める速さを v とすると

$$\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v^2+\frac{1}{2}k(d-x_2)^2+2mgx_2$$
$$v^2=\frac{k}{2m}x_2(2d-x_2)-2gx_2=\frac{k}{2m}\cdot\frac{4mg}{k}\cdot\frac{8mg}{k}-2g\cdot\frac{4mg}{k}$$

$$v=2g\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

別解　振動の中心位置をみかけの自然の長さとし，水平方向の単振動とみなして立式すると

$$\frac{1}{2}kx_2{}^2=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v^2 \qquad v=2g\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

別解　単振動の最大の速さ v は，

$v=$(振幅)×(角振動数) で求められる。

$$v=x_2\omega=\frac{4mg}{k}\cdot\sqrt{\frac{k}{2m}}=2g\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

(3)(ク)　(い) より，求める速さを v' とすると

$$\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v'^2+2mgd$$

これを解いて　$v'=g\sqrt{\dfrac{6m}{k}}$

別解　この単振動を円運動の正射影と考えると，図 b のようになる。

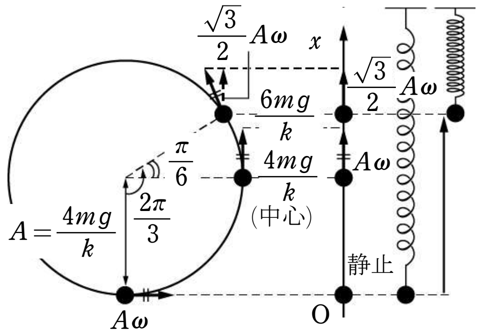


図 b

よって　$v'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2\omega=g\sqrt{\dfrac{6m}{k}}$

(4)(ケ)　等加速度運動ゆえ，求める高さを h として

$$0^2-v'^2=2\cdot(-g)h$$
$$h=\frac{v'^2}{2g}=\frac{3mg}{k}$$

(コ)　同様に「$v=v_0+at$」より

$$-v'=v'-gt$$
$$t=\frac{2v'}{g}=2\sqrt{\frac{6m}{k}}$$

よって求める時刻は　$t_2+2\sqrt{\dfrac{6m}{k}}$

(ろ)　時刻 t_1 までは，x_1 を中心とした振幅 x_1，周期 t_1 の単振動をし，それから時刻 t_2 までは，x_2 を中心とした振幅 x_2，周期 T の単振動をする。それから前問で求めた時刻までは，等加速度運動 (鉛直投げ上げ運動) をする。また $x_1<x_2$，かつ，$t_1>T$ である。

以上のことから，グラフは ① とわかる。

(は)　図 b から，最下点から点 P までの時間は，$\dfrac{1}{3}$ 周期とわかる。よって，求める周期は

$$\frac{T}{3}+t+\frac{T}{3}=\frac{1}{3}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}+2\sqrt{\frac{6m}{k}}+\frac{1}{3}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi+2\sqrt{6}\right)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となるので，⑩

２．

図 1 のように，断面積 S，長さ L，質量 M の円柱が，密度 ρ の液体が入った容器に静止して浮かんでいる。静止時の円柱の上面の位置を原点として，鉛直下向きを正方向に x 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。

なお，円柱は傾くことなく鉛直方向のみに運動し，L は十分に長く円柱の上面が液面より下になることはなく，円柱が容器の底に接触することもないものとする。また，運動に際して円柱は液体から浮力のみを受け，円柱が運動しても液面の乱れや高さの変化はないものとし，以下の問いに答えよ。

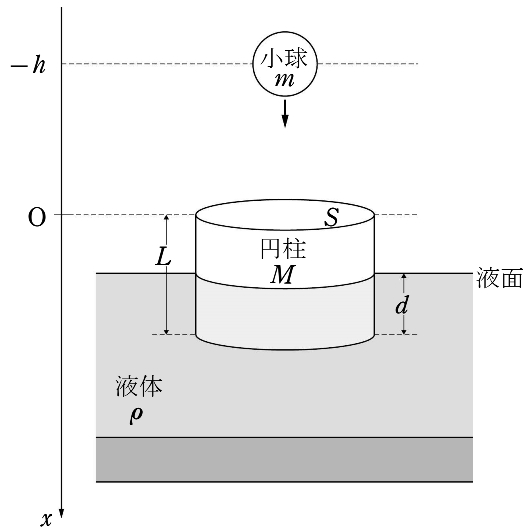


図 1

(1)　質量 m $(m<M)$ の小球を，$x=-h$ $(h>0)$ の位置から静止している円柱の上面中央に落とした。ここで，円柱上面と小球の間の反発係数(はねかえり係数)は 1 であり，小球の大きさはないものとする。

(a)　小球の衝突前，静止している円柱にはたらく浮力 F_0，および円柱の液面から下の長さ d を，S，M，m，ρ，h，g の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　衝突直前の小球の速度 v_0，衝突直後の小球の速度 v，および衝突直後の円柱の速度 V を，M，m，h，g の中から必要なものを用いて表せ。

(c)　小球が衝突後に達する最高点を $x=-H$ $(H>0)$ とするとき，H を，M，m，h，g の中から必要なものを用いて表せ。

(2)　図1の静止時の円柱の下面にばね定数 k のばねを取りつけ，ばねのもう一方の端を液体を満たしている容器の底に固定した。このとき，ばねは自然の長さであった。円柱の上面中央に質量 m $(m<M)$ のおもりを固定して静止させると，おもりがのった円柱は，図2のように，$x=x_0$ の位置でつりあった。おもりがのった円柱をつりあいの位置から $x=0$ の位置まで引き上げて静かにはなすと，円柱にばねと浮力による復元力がはたらき，円柱がおもりをのせたまま単振動した。つりあいの位置から Δx 変位した円柱にはたらく復元力は $F=-K\Delta x$ (K：正の定数) と表すことができる。ばねの質量と体積はないものとする。

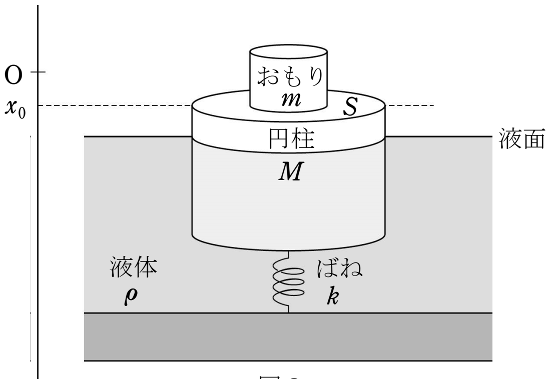


図2

(a)　おもりがのった円柱のつりあいの位置 x_0 を，S，M，m，k，ρ，g の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　おもりがのった円柱の単振動における定数 K，および周期 T を，S，M，m，k，ρ，g の中から必要なものを用いて表せ。

(c)　おもりがのったまま単振動する円柱が鉛直下向きに動いて $x=x_0$ にきたときに静かにおもりを取りさると，その後も，円柱は単振動した。おもりを取りさった後の円柱の単振動の振幅 A を，M，m，K，x_0 の中から必要なものを用いて表せ。

解答　(1) (a)　F_0：$-Mg$，d：$\dfrac{M}{\rho S}$

(b)　v_0：$\sqrt{2gh}$，v：$\dfrac{m-M}{m+M}\sqrt{2gh}$，$V$：$\dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gh}$

(c)　$\left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)^2 h$

(2) (a)　$\dfrac{mg}{k+\rho Sg}$　　(b)　K：$k+\rho Sg$，T：$2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k+\rho Sg}}$

(c)　$\sqrt{\dfrac{2M+m}{M+m}}\,x_0$

解説

(1)(a)　円柱にはたらく力のつりあいを考えて

$F_0+Mg=0$　……①　　ゆえに　$F_0=-Mg$

一方，液体内にある円柱の体積は Sd だから

$|F_0|=\rho Sdg$

①式より　　$d=\dfrac{M}{\rho S}$

(b)　力学的エネルギー保存の法則より

$mgh=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$　　$v_0>0$ より　$v_0=\sqrt{2gh}$

衝突前後において，運動量が保存しているとみなせ，反発係数が1であることから

$$\begin{cases} mv_0=mv+MV \\ v_0=-v+V \end{cases}$$

2式より

$$\begin{cases} v=\dfrac{m-M}{m+M}v_0=\dfrac{m-M}{m+M}\sqrt{2gh} \\ V=\dfrac{2m}{m+M}v_0=\dfrac{2m}{m+M}\sqrt{2gh} \end{cases}$$

(c)　力学的エネルギー保存の法則より

$\dfrac{1}{2}mv^2=mgH$

$H=\dfrac{v^2}{2g}=\left(\dfrac{m-M}{m+M}\right)^2 h$

(2)(a)　位置 x における力を図示すると，図aのようになる。

おもりと円柱の運動方程式を各々立てる。おもりと円柱の間にはたらく垂直抗力の大きさを N，加速度を a として

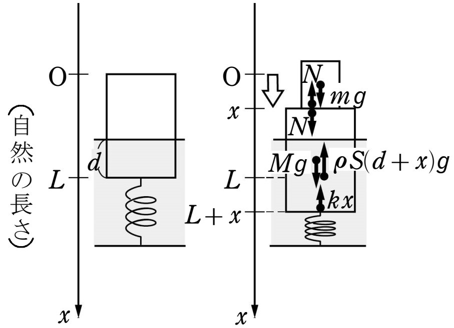
$$\begin{cases} ma=mg-N \\ Ma=Mg+N-\rho S(d+x)g-kx \end{cases}$$

この2式と(1)の結果より

$(M+m)a=mg-kx-\rho Sxg$

$(M+m)a=-(k+\rho Sg)\left(x-\dfrac{mg}{k+\rho Sg}\right)$　……②

$a=-\dfrac{k+\rho Sg}{M+m}\left(x-\dfrac{mg}{k+\rho Sg}\right)$　……②′



図a

となる。位置 x_0 でつりあうとき，$a=0$ であるから

$$x_0=\frac{mg}{k+\rho Sg}$$

(b)　② 式より

$$K=k+\rho Sg$$

②′ 式より，このときの角振動数 ω は

$$\omega=\sqrt{\frac{k+\rho Sg}{M+m}}$$

となる。よって，周期は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k+\rho Sg}}$$

(c)　おもりがのっているとき，振幅 x_0，周期 T，振動の中心 $x=x_0$ の単振動を行う。

一方，おもりが取りさられたときは，前問 (a)(b) において，$m=0$ とすればよく，周期

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{M}{k+\rho Sg}}\quad\left(\text{角振動数 }\omega'=\sqrt{\frac{k+\rho Sg}{M}}\right)$$

振動の中心 $x=0$ の単振動を行うことがわかる。

これらのことから，位置 x の時間変化をグラフにすると，図 b のようになる。

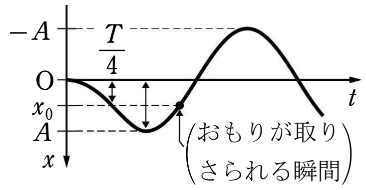


図 b

おもりが取りさられる瞬間，初めの単振動においては最も速いときなので，

(単振動の最大の速さ)=(振幅)×(角振動数)

より，その速さ v_0 は

$$v_0=x_0\omega=x_0\sqrt{\frac{k+\rho Sg}{M+m}}=x_0\sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

となる。

この瞬間から，新たな単振動で最大の変位となるまでは，力学的エネルギーが保存している。また，(b) より，定数 K の値は不変ゆえ

$$\frac{1}{2}M{v_0}^2+\frac{1}{2}K{x_0}^2=\frac{1}{2}KA^2$$

$$\frac{1}{2}M{x_0}^2\frac{K}{M+m}+\frac{1}{2}K{x_0}^2=\frac{1}{2}KA^2$$

よって　$A=\sqrt{\dfrac{2M+m}{M+m}}\,x_0$

別解　一般に単振動の位置 x，速度 v の時間変化は，次のように書ける。

$$\begin{cases}x(t)=l+A\sin(\omega t+\phi)\\ v(t)=A\omega\cos(\omega t+\phi)\end{cases}$$

ここで，l は振動の中心位置，A は振幅，ω は角振動数，ϕ は初期位相を表す。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の関係より

$$\left(\frac{x(t)-l}{A}\right)^2+\left(\frac{v(t)}{A\omega}\right)^2=1$$

と表せる。これは，単振動に関して，任意の時刻で成立する式である。この関係式において，$x(t)-l\to x_0$，$v(t)\to x_0\sqrt{\dfrac{k+\rho Sg}{M+m}}$，$\omega\to\sqrt{\dfrac{k+\rho Sg}{M}}$ とすると

$$\left(\frac{x_0}{A}\right)^2+\left(\frac{x_0}{A}\sqrt{\frac{M}{M+m}}\right)^2=1$$

となり，ここから A が求まる。