1．

図1のような，水平とのなす角が θ のなめらかな斜面となめらかな鉛直面からなる質量 M の台Aを考え，その斜面上に質量 m の小物体Bを置く。この小物体Bに軽くて伸びない糸の一端をつなぎ，それをこの斜面の上端に固定された軽くてなめらかに回る滑車に通し，そのもう一方の端に質量 m の小物体Cをつないで，小物体Cを滑車から鉛直につり下げたとき台Aの鉛直面に接するようにする。小物体Bと滑車の間の糸は斜面に平行に保たれ，さらに，小物体BとCはいずれも台Aの上端または下端に達しないとし，また，重力加速度の大きさを g とおく。空気の影響はないものとして，次の問いに答えよ。

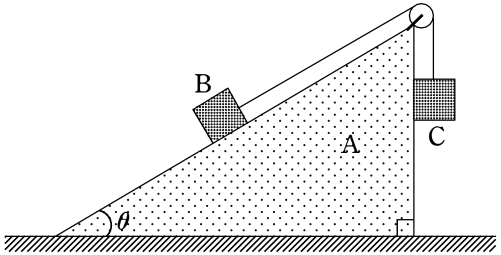


図1

［A］ 図1のように，台Aを水平面上に固定し，小物体Bを斜面上に止めた状態から静かにはなすと，小物体BとCは動き始めた。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 小物体Cは上昇するか，下降するか。

(2) 小物体Cの加速度の大きさを求めよ。

(3) 糸が小物体Bを引く力の大きさを求めよ。

(4) 糸が滑車を通して台Aを押す力の水平方向の成分の大きさを求めよ。

［B］ 図2のように，台Aをなめらかな水平面上に置き，それを水平に一定の力で引くことにより等加速度運動させると，小物体Bが斜面上のある位置に止まったままになった。このとき，次の問いに答えよ。

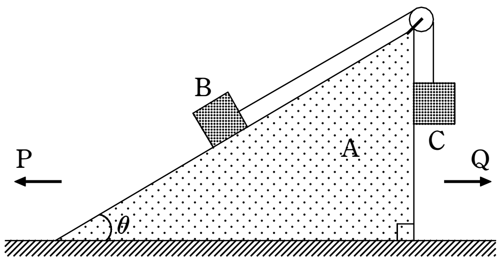


図2

(1) 台Aを引く力の向きは，図2の矢印PとQのいずれの向きか。

(2) 台Aの加速度の大きさを求めよ。

(3) 小物体Bが台Aから受ける抗力の大きさを求めよ。

(4) 台Aを引く力の大きさを求めよ。

［C］ 台Aがなめらかな水平面上を自由に動くことができるようにする。さらに，図3のように，小物体Cの右側になめらかな鉛直の壁Dを台Aに固定し，小物体Cが台Aの鉛直面に接しながら台Aに対し上下にのみなめらかに動くようにする。この状況で，小物体Bをその斜面上で動かないように支え，かつ，台Aを水平面上で動かないように支える。この状態から，台Aと小物体Bの支えを同時に静かに外すと，台Aおよび小物体BとCは動き始めた。台Aに取りつけた壁Dからなる部分の質量はないものとして，次の問いに答えよ。

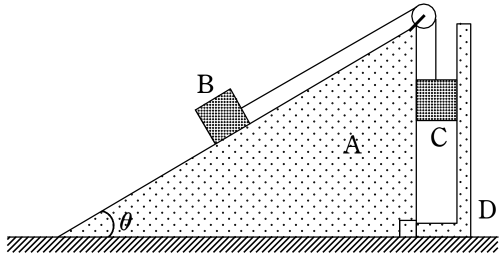


図3

(1) 台Aの加速度の大きさを a_{A}，また，台Aに対して静止した(台Aとともに動く)観測者から見たときに，小物体Cが鉛直方向に動く加速度の大きさを a_{C} とするとき，加速度の大きさの比 $\dfrac{a_{\mathrm{C}}}{a_{\mathrm{A}}}$ を M，m，θ を用いて表せ。

(2) a_{C} を M，m，g，θ を用いて表せ。

解答 ［A］ (1) 下降する　(2) $\dfrac{g}{2}(1-\sin\theta)$　(3) $\dfrac{mg}{2}(1+\sin\theta)$

(4) $\dfrac{mg}{2}(1+\sin\theta)\cos\theta$

［B］ (1) Q　(2) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}g$　(3) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}mg$

(4) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}(M+2m)g$

［C］ (1) $\dfrac{M+2m}{m\cos\theta}$　(2) $\dfrac{(M+2m)g(1-\sin\theta)}{2M+(4-\cos^2\theta)m}$

解説

ヒント ［A］ (4) 糸が滑車を通して台Aを押す力は，滑車にはたらく2つの糸の張力の合力である。

［B］ (2)，(3) 等加速度直線運動をしている台A上から観測すると，小物体B，Cには重力，垂直抗力，張力のほかに慣性力がはたらいていて，静止している
→ 力はつりあっている

(4) 台Aに対して小物体B，Cは静止しているので，Aを引く力によってA，B，

C が一体の物体として運動していると考える。

〔C〕 等加速度直線運動をしている台 A 上から観測すると，小物体 B，C には慣性力がはたらき，B は斜面上向きに，C は鉛直下向きに等加速度直線運動をしている。

〔A〕 (1) 小物体 B，C にはたらく力は図 a のようになる。図 a より，B を斜面方向下向きに引く力の成分 $mg\sin\theta$ よりも，C を鉛直下向きに引く力 mg のほうが大きいので，C は下降する。

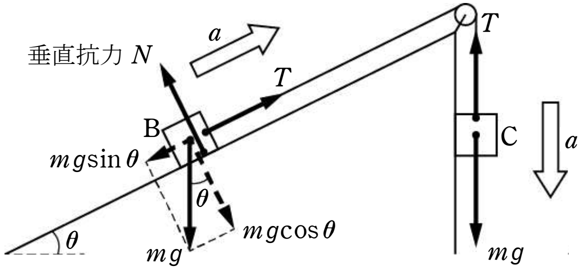


図 a

(2) 図 a のように，小物体 B，C の加速度の大きさを a，糸の張力の大きさを T とし，運動方程式を立てる。「$ma=F$」より

B : $ma=T-mg\sin\theta$ ……①

C : $ma=mg-T$ ……②

①，② 式の辺々を加えて T を消去すると

$2ma=mg-mg\sin\theta$ よって $a=\dfrac{g}{2}(1-\sin\theta)$

(3) ①，② 式の辺々を引いて a を消去すると

$0=2T-mg-mg\sin\theta$ よって $T=\dfrac{mg}{2}(1+\sin\theta)$

(4) 滑車にはたらく糸の張力は図 b のようになるので，水平成分の大きさは

$T\cos\theta=\dfrac{mg}{2}(1+\sin\theta)\cos\theta$

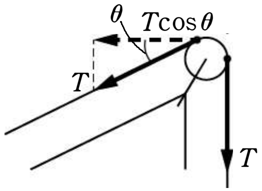


図 b

〔B〕 (1) 〔A〕では小物体 B が斜面をすべり上がるので，B が台 A 上で止まるためには，B に斜面方向下向きの力を加えればよい。そのためには水平左向きの慣性力が B に加わればよいので，台 A はその反対向き (右向き) に加速すればよい。よって **Q**

(2) 台 A の加速度を右向きに α とする。A とともに運動する観測者から見た小物体 B，C にはたらく力は図 c のようになる。

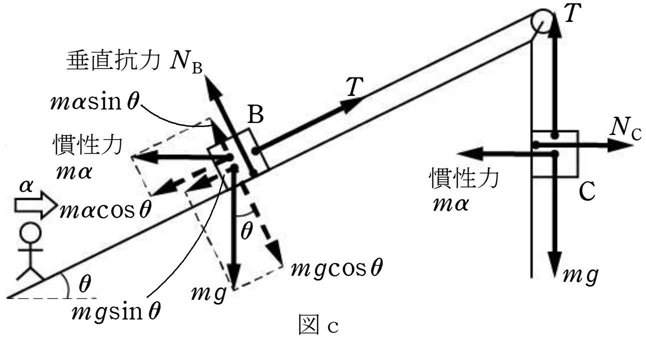


図 c

このとき B，C は A に対して静止しているので，A とともに運動する観測者から見ると力はつりあっている。B について，斜面方向の力のつりあいの式は

$T=mg\sin\theta+m\alpha\cos\theta$ ……③

C について，鉛直方向の力のつりあいの式は $T=mg$ ……④

③，④ 式より $mg=mg\sin\theta+m\alpha\cos\theta$

よって $\alpha=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}g$ ……⑤

(3) 小物体 B が台 A から受ける垂直抗力を N_B とする。B について，斜面に垂直な方向の力のつりあいの式は

$N_B+m\alpha\sin\theta=mg\cos\theta$

$N_B=mg\cos\theta-m\alpha\sin\theta=mg\cos\theta-m\left(\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}g\right)\sin\theta$

$=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}mg$ ※A←

(4) 小物体 B，C は台 A に対して相対的に静止しているので，A，B，C を一体の物体と考える。この物体を外力 F で引くと，⑤ 式の加速度 α が生じるので，運動方程式「$ma=F$」より $(M+2m)\alpha=F$

よって $F=(M+2m)\times\left(\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}g\right)=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}(M+2m)g$

〔C〕 (1) 台 A，小物体 B，C，壁 D からなる物体系には，系の外から水平方向の力がはたらかないので，系全体の重心は水平方向に移動しない。B は斜面をのぼる，すなわち水平右向きに移動するため，A は水平左向きに移動する。つまり，A の加速度 a_A は左向きであり，A とともに運動する観測者から見ると，B，C には右向きの慣性力 ma_A がはたらく。また，C には D から左向きの抗力 N_C がはたらく。A とともに運動する観測者から見たときの B，C にはたらく力を図 d に，A と D

にはたらく力を図 e に示す。

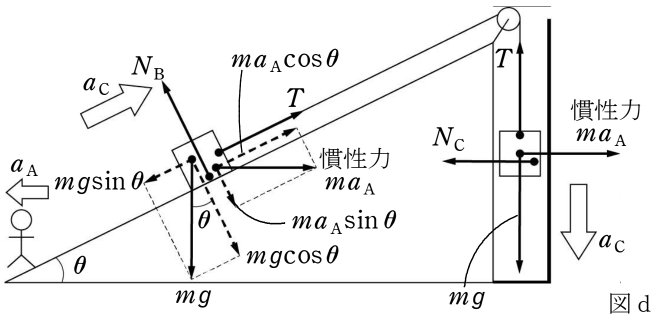


図 d

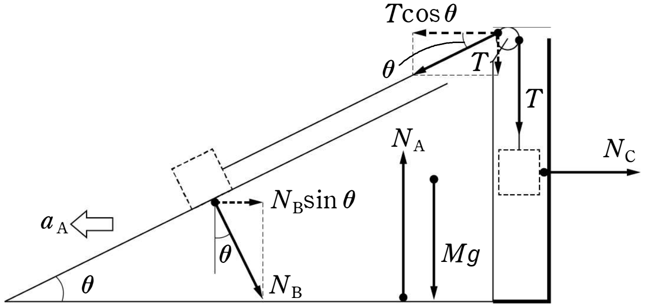


図 e

B の斜面方向の運動方程式は，斜面方向上向きを正として

$ma_C = T + ma_A\cos\theta - mg\sin\theta$ ……⑥

斜面と垂直な方向の力のつりあいの式は

$N_B = mg\cos\theta + ma_A\sin\theta$ ……⑦

C の鉛直方向の運動方程式は，鉛直下向きを正として

$ma_C = mg - T$ ……⑧

水平方向の力のつりあいの式は

$N_C = ma_A$ ……⑨

A の水平方向の運動方程式は，水平左向きを正として

$Ma_A = T\cos\theta - N_B\sin\theta - N_C$ ……⑩

⑥ 式より求めた T，⑦ 式から求めた N_B，⑨ 式から求めた N_C を ⑩ 式に代入して

$$Ma_A = (ma_C - ma_A\cos\theta + mg\sin\theta)\cos\theta - (mg\cos\theta + ma_A\sin\theta)\sin\theta - ma_A$$

$$\{M + m(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + m\}a_A = ma_C\cos\theta$$

よって $\dfrac{a_C}{a_A} = \dfrac{\boldsymbol{M+2m}}{\boldsymbol{m\cos\theta}}$ ※B← ……⑪

(2) ⑥ 式と ⑧ 式を辺々加えると $2ma_C = ma_A\cos\theta + mg(1-\sin\theta)$

⑪ 式より求めた a_A を代入すると

$$2a_C = \frac{m\cos\theta}{M+2m}a_C\cdot\cos\theta + g(1-\sin\theta)$$

$$\frac{2(M+2m) - m\cos^2\theta}{M+2m}a_C = g(1-\sin\theta)$$

よって $a_C = \dfrac{\boldsymbol{(M+2m)g(1-\sin\theta)}}{\boldsymbol{2M+(4-\cos^2\theta)m}}$

←※A 別解 鉛直方向の力のつりあいを考えると

$$N_B\cos\theta + T\sin\theta = mg$$

よって $N_B = \dfrac{\boldsymbol{1-\sin\theta}}{\boldsymbol{\cos\theta}}\boldsymbol{mg}$

←※B 別解 静止系から見た小物体 B の水平方向の加速度は $a_C\cos\theta - a_A$

運動開始から t 秒後，

A は左に $x_A = \dfrac{1}{2}a_At^2$

B は右に $x_B = \dfrac{1}{2}(a_C\cos\theta - a_A)t^2$

C は左に $x_C = \dfrac{1}{2}a_At^2$

だけ移動する。系全体の重心が移動しないことから

$$0 = \frac{Mx_A + m(-x_B) + mx_C}{M+m+m}$$

x_A，x_B，x_C を代入して

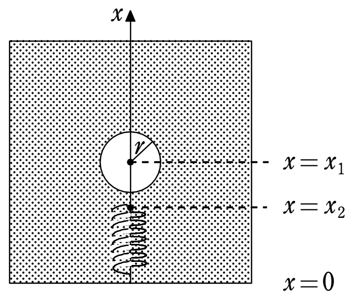
$$M\cdot\frac{1}{2}a_At^2 - m\cdot\frac{1}{2}(a_C\cos\theta - a_A)t^2 + m\cdot\frac{1}{2}a_At^2 = 0$$

よって $\dfrac{a_C}{a_A} = \dfrac{\boldsymbol{M+2m}}{\boldsymbol{m\cos\theta}}$

2．

次の文章を読み，設問に対する答えを求めよ。

水平な台の上に一辺が L〔m〕のふた付きの軽い立方体の水槽が置かれている。水槽の底面の中心に原点を置き，鉛直上方に x 軸をとる。半径 r〔m〕の軽い中空の球$\left(体積\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$と自然の長さ l〔m〕，ばね定数 k〔kg/s²〕の軽いばねをつなぎ，ばねの他端を原点に固定する。この水槽に水を満たし，ふたをする。このとき球は浮力を受けて水槽のほぼ中央に浮かんでいる(図)。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕，水の密度を ρ〔kg/m³〕，水の比熱を c〔J/(kg·K)〕として次の問いに答えよ。



(3) 以降では，x_1 および x_2 は，そのまま記号として使用してもよい。また，(5) 以降では x_3 をそのまま記号として使用してもよい。

(1)　一様な球や立方体の重心は，それらの中心にある。水槽中の中空の球は x 軸上で静止しているとする。
　球の中心位置を x_1 として，水槽全体の重心 x_2 を求めよ。

(2)　球にはたらく浮力とばねによる張力とのつりあい条件から x_1 を求めよ。

(3)　(2) のばねに蓄えられたエネルギーを求めよ。

(4)　水槽を台にのせたままエレベーターに固定する。エレベーターが動きだして一定の加速度 a〔m/s²〕で上昇を続けた場合，重力に加えて慣性力が作用する。その状態で，十分時間がたった後の球の中心位置 x_3 を求めよ。

(5)　(4) のばねに蓄えられたエネルギーを求めよ。

(6)　エレベーターが減速して静止したとき，ばねに蓄えられていたエネルギーが水の温度上昇にすべて使われたとする。
　水の温度上昇 $\varDelta T$〔K〕を求めよ。

(7)　静止した状態のエレベーターのロープを切り離して，水槽を自由落下させる。自由落下している水槽中の球の状態として最も適切なものを選べ。

①　球は最初下方に動き，振動を始めるが，やがて振動は収まり，ばねは自然の長さになる。

②　球は最初上方に動き，振動を始めるが，やがて振動は収まり，ばねは自然の長さになる。

③　球は最初下方に動き，振動を始めるが，やがて振動は収まり，ばねはエレベーターが静止していたときの長さにもどる。

④　球は最初上方に動き，振動を始めるが，やがて振動は収まり，ばねはエレベーターが静止していたときの長さにもどる。

⑤　球の中心はエレベーターが静止していたときの位置から変化しない。

解答　(1)　$\dfrac{3L^4-8\pi r^3 x_1}{2(3L^3-4\pi r^3)}$〔m〕　(2)　$r+l+\dfrac{4\pi r^3\rho g}{3k}$〔m〕　(3)　$\dfrac{1}{2}k(x_1-r-l)^2$〔J〕

(4)　$r+l+\dfrac{4\pi r^3\rho(g+a)}{3k}$〔m〕$\left(=x_1+\dfrac{4\pi r^3\rho a}{3k}〔m〕\right)$　(5)　$\dfrac{1}{2}k(x_3-r-l)^2$〔J〕

(6)　$\dfrac{3k\{x_1+x_3-2(r+l)\}(x_3-x_1)}{2\rho c(3L^3-4\pi r^3)}$〔K〕　(7)　①

解説

(1)　水槽内の水は，体積 L^3〔m³〕の水(重心の座標は $\dfrac{L}{2}$〔m〕)から体積 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$〔m³〕の水(重心の座標は x_1〔m〕)を抜きとったものである。問題の図を横にしてかいたのが図 a で，L^3〔m³〕の水にはたらく重力から $\dfrac{4}{3}\pi r^3$〔m³〕の水にはたらく重力を引けばよい。

(密度の定義「$\rho=\dfrac{質量\ m}{体積\ V}$」より，体積 V〔m³〕の水にはたらく重力の大きさ W〔N〕は
　$W=mg=\rho Vg$〔N〕
で表される。)

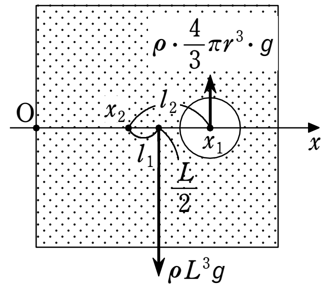


図 a

平行で逆向きの 2 力の合力の作用線は 2 力の間の距離を力の逆比に外分した点を通るので，図 a の l_1 と l_2 の比は

$$l_1:l_2=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot g:\rho L^3 g$$

となる。

l_1，l_2 を各点の座標で表すと

$$\left(\frac{L}{2}-x_2\right):(x_1-x_2)=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot g:\rho L^3 g$$

よって　$(x_1-x_2)\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3=\left(\dfrac{L}{2}-x_2\right)\cdot L^3$

両辺を 6 倍して x_2 について整理すると

$$(6L^3-8\pi r^3)x_2=3L^4-8\pi r^3 x_1$$

ゆえに　$x_2=\dfrac{3L^4-8\pi r^3x_1}{2(3L^3-4\pi r^3)}$〔m〕

別解　$x=\dfrac{L}{2}$〔m〕に質量 ρL^3〔kg〕，$x=x_1$ に質量 $-\rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$〔kg〕の物体があると考えて，重心の式「$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$」を用いると

$$x_2=\frac{\rho L^3\cdot\dfrac{L}{2}+\left(-\rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)\cdot x_1}{\rho L^3+\left(-\rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{L^4}{2}-\dfrac{4}{3}\pi r^3x_1}{L^3-\dfrac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3L^4-8\pi r^3x_1}{2(3L^3-4\pi r^3)}\text{〔m〕}$$

(2)　ばねの伸びは図 b のように x_1-r-l〔m〕である。球にはたらく力は図 b のようになり，この 2 力がつりあう。浮力の式「$F=\rho Vg$」とフックの法則「$F=kx$」を用いると，力のつりあいの式は

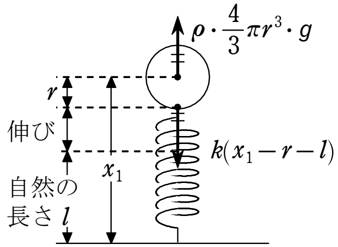


図 b

$$\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot g-k(x_1-r-l)=0$$

整理すると　$x_1-r-l=\dfrac{4\pi r^3\rho g}{3k}$　…… ①

よって　$x_1=r+l+\dfrac{4\pi r^3\rho g}{3k}$〔m〕

(3)　(2) より，ばねの伸びは x_1-r-l〔m〕なので，弾性力による位置エネルギーの式「$U_k=\dfrac{1}{2}kx^2$」より，ばねに蓄えられたエネルギーは

$$U_k=\frac{1}{2}k(x_1-r-l)^2\text{〔J〕}$$

(4)　一般に，加速度 a〔m/s²〕で上向きに加速するエレベーターの中で質量 m〔kg〕の物体を観測したとき，重力 mg〔N〕のほかに，エレベーターの加速度と逆の向き (下向き) に大きさ ma〔N〕の慣性力がはたらく(図 c)。

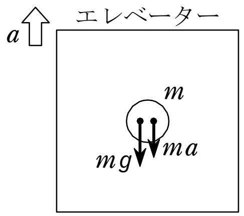


図 c

この合力の大きさを mg'〔N〕とすると

$$mg'=mg+ma=m(g+a)$$

よって　$g'=g+a$　…… ②

この g' はエレベーター内で感じる見かけの重力加速度の大きさである。ゆえに求める値 x_3〔m〕は，(2) で立てた式中の g を $g'=g+a$ におきかえたものになる。

したがって (2) の答えより

$$x_3=r+l+\frac{4\pi r^3\rho(g+a)}{3k}\text{〔m〕}$$

$$\left(=x_1+\frac{4\pi r^3\rho a}{3k}\text{〔m〕}\right)$$

(5)　ばねの伸びは x_3-r-l〔m〕なので，(3) と同様に　$U_k=\dfrac{1}{2}k(x_3-r-l)^2$〔J〕

(6)　ばねの伸びは

エレベーター加速中 …… x_3-r-l〔m〕

エレベーター停止後 …… x_1-r-l〔m〕

なので，この間に失われた弾性力による位置エネルギー (弾性エネルギー) は

$$\frac{1}{2}k(x_3-r-l)^2-\frac{1}{2}k(x_1-r-l)^2$$

$$=\frac{1}{2}k\{(x_3-r-l)+(x_1-r-l)\}\times\{(x_3-r-l)-(x_1-r-l)\}$$

$$=\frac{1}{2}k\{x_1+x_3-2(r+l)\}(x_3-x_1)\text{〔J〕}$$

これがすべて熱になる。水の質量は　$\rho\left(L^3-\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$〔kg〕　であることに注意して熱量の式「$Q=mc\Delta T$」を用いると

$$\frac{1}{2}k\{x_1+x_3-2(r+l)\}(x_3-x_1)=\rho\left(L^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right)c\Delta T$$

よって

$$\Delta T=\frac{\dfrac{1}{2}k\{x_1+x_3-2(r+l)\}(x_3-x_1)}{\rho c\left(L^3-\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)}$$

$$=\frac{3k\{x_1+x_3-2(r+l)\}(x_3-x_1)}{2\rho c(3L^3-4\pi r^3)}\text{〔K〕}$$

(7)　(4) と同様に考える。エレベーターのロープを切り離した後，エレベーターは下向きの加速度$a=-g$〔m/s²〕で落下するので，② 式に代入すると，エレベーター内の見かけの重力加速度の大きさ g''〔m/s²〕は

$$g''=g+(-g)=0$$

となる。よって ① 式より最終的なばねの伸びは

$$x_1-r-l=\frac{4\pi r^3\rho g''}{3k}=0$$

となり，ばねは自然の長さになる。エレベーターが静止していたときは，球にはたらく浮力によってばねが伸びていたので，ロープを切った直後，ばねの弾性力が下向きにはたらいて球は下方へ動きだす。球は水の抵抗力を受けながら振動するので，やがて振動は収まり，ばねが自然の長さになった所で球は静止する。答えは ①