1．

図 1 のように，十分大きくなめらかな円錐(えんすい)面が，中心軸を鉛直に，頂点 O を下にして置かれている。大きさの無視できる質量 m の小物体が円錐面上を運動する。頂点 O において円錐面と中心軸のなす角度を θ とし，重力加速度の大きさを g とする。

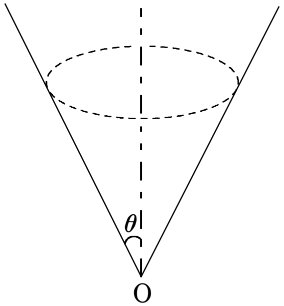


図　1

(1)　図 2 のように，頂点 O から距離 l の位置に小物体を置き，静かに放した。小物体が頂点 O に到達するまでの時間を表す式として正しいものを，下の ①～⑧ のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\ 1\ }$

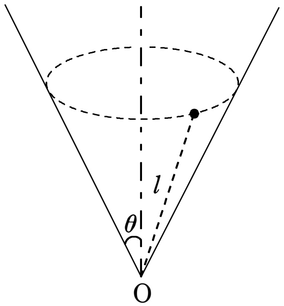


図　2

① $\dfrac{l}{g}$　② $\dfrac{l}{g}\tan\theta$　③ $\dfrac{l}{g\cos\theta}$　④ $\dfrac{l}{g\sin\theta}$

⑤ $\sqrt{\dfrac{2l}{g}}$　⑥ $\sqrt{\dfrac{2l}{g}\tan\theta}$　⑦ $\sqrt{\dfrac{2l}{g\cos\theta}}$　⑧ $\sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\theta}}$

(2)　次に，図 3 のように，大きさ v_0 の初速度を水平方向に与えると，小物体は等速円運動をした。その半径 a を表す式として正しいものを，下の ①～⑧ のうちから 1 つ選べ。$a=\boxed{\ 2\ }$

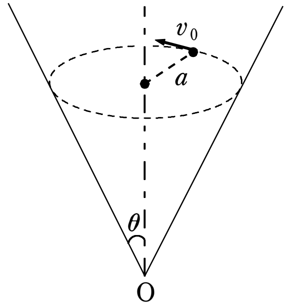


図　3

① $\dfrac{g\sin\theta}{{v_0}^2}$　② $\dfrac{g\cos\theta}{{v_0}^2}$　③ $\dfrac{g}{{v_0}^2\tan\theta}$　④ $\dfrac{g\sin\theta\cos\theta}{{v_0}^2}$

⑤ $\dfrac{{v_0}^2}{g\sin\theta}$　⑥ $\dfrac{{v_0}^2}{g\cos\theta}$　⑦ $\dfrac{{v_0}^2\tan\theta}{g}$　⑧ $\dfrac{{v_0}^2}{g\sin\theta\cos\theta}$

(3)　次に，図 4 のように，頂点 O から距離 l_1 の点 A で，大きさ v_1 の初速度を与えたところ，小物体は円錐面にそって運動し，頂点 O から距離 l_2 の点 B を通過した。点 B における小物体の速さを表す式として正しいものを，下の ①～⑨ のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\ 3\ }$

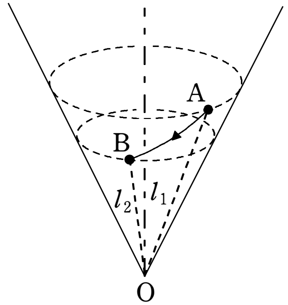


図　4

① $\sqrt{2g(l_1-l_2)}$　② $\sqrt{{v_1}^2+2g(l_1-l_2)}$

③ $\sqrt{2g(l_1-l_2)\cos\theta}$　④ $\sqrt{{v_1}^2+2g(l_1-l_2)\cos\theta}$

⑤ $\sqrt{2g(l_1-l_2)\sin\theta}$　⑥ $\sqrt{{v_1}^2+2g(l_1-l_2)\sin\theta}$

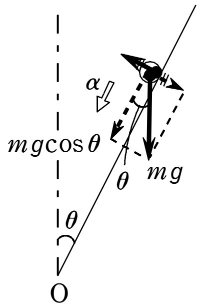
⑦ v_1　⑧ $v_1\cos\theta$

⑨ $v_1\sin\theta$

解答　(1) ⑦　(2) ⑦　(3) ④

(解説)

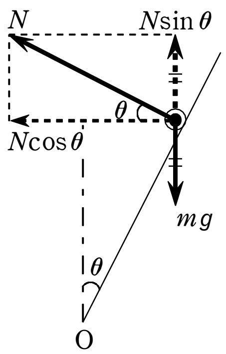
(1) 小物体にはたらく力は右図のようになるので，斜面にそって下向きの加速度を α とすると，運動方程式 $m\alpha=mg\cos\theta$ より $\alpha=g\cos\theta$ で等加速度直線運動することがわかる。斜面にそって l 下るのにかかる時間を t とすれば $l=\dfrac{1}{2}\alpha t^2$ より



$$t=\sqrt{\frac{2l}{\alpha}}$$
$$=\sqrt{\frac{2l}{g\cos\theta}}$$

以上より，正しいものは　⑦。

(2) 小物体は水平面内で等速円運動するので鉛直方向の力はつりあい，水平方向の（向心）加速度の大きさは $\dfrac{{v_0}^2}{a}$ なので小物体が円錐面から受ける垂直抗力を N とすると



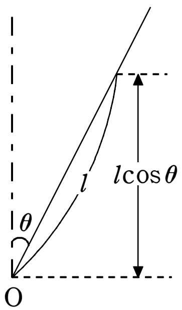
$mg=N\sin\theta$　…①

$m\dfrac{{v_0}^2}{a}=N\cos\theta$　…②

$\dfrac{①}{②}$ より N を消去して整理すると　$a=\dfrac{{v_0}^2\tan\theta}{g}$

以上より，正しいものは　⑦。

(3) 右図のように，頂点 O からの距離が l の点は，点 O より $l\cos\theta$ 高いので，点 B における速さを v_2 とすると，力学的エネルギー保存則より



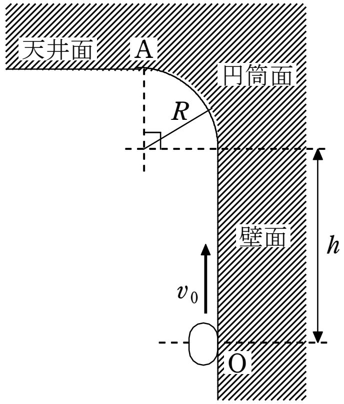
$$\frac{1}{2}m{v_1}^2+mgl_1\cos\theta=\frac{1}{2}m{v_2}^2+mgl_2\cos\theta$$

ゆえに　$v_2=\sqrt{{v_1}^2+2g(l_1-l_2)\cos\theta}$

以上より，正しいものは　④。

2．

図のように，鉛直な壁面，半径 R の円筒面，水平な天井面がなめらかにつながっている。質量 m の小物体を点 O から速さ v_0 で鉛直上方に打ち出したところ，小物体は距離 h だけ壁面にそって運動した後，円筒面にそって運動し，点 A を通過した。ただし，すべての面はなめらかであるものとする。また，重力加速度の大きさを g とする。



(1)　小物体が点 A を通過するときの速さ v_A を表す式として正しいものを，次の ①～⑥ のうちから 1 つ選べ。$v_A=\boxed{\ 1\ }$

①　$\sqrt{{v_0}^2-gh}$　②　$\sqrt{{v_0}^2-2gh}$　③　$\sqrt{{v_0}^2-gR}$

④　$\sqrt{{v_0}^2-2gR}$　⑤　$\sqrt{{v_0}^2-g(R+h)}$　⑥　$\sqrt{{v_0}^2-2g(R+h)}$

(2)　小物体が点 A を通過するための，v_A の最小値を表す式として正しいものを，次の ①～⑦ のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\ 2\ }$

①　$\sqrt{gh}$　②　$\sqrt{gR}$　③　$\sqrt{g(R+h)}$　④　$\sqrt{2gh}$

⑤　$\sqrt{2gR}$　⑥　$\sqrt{2g(R+h)}$　⑦　0

解答　(1) ⑥　(2) ②

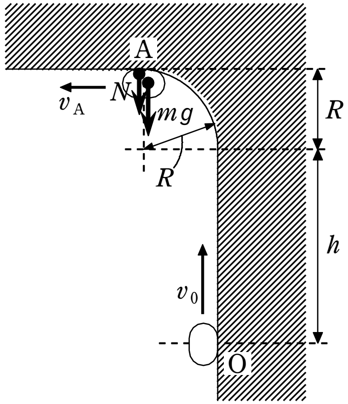
(解説)

(1)　点 O と点 A で力学的エネルギーが保存する。
よって，重力による位置エネルギーの基準面を点 O を通る水平面とすると

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}{}^2+mg(h+R)$$

ゆえに　$v_{\mathrm{A}}=\sqrt{v_0{}^2-2g(R+h)}$

以上より，正しいものは ❻。



(2)　小物体が点 A に達する直前に面から受ける垂直抗力を N とすると，円運動の中心方向の運動方程式から

$$m\frac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{R}=N+mg \qquad \text{ゆえに} \quad N=m\frac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{R}-mg$$

このとき，$N\geqq 0$ であれば，小物体は円運動をして点 A を通過するので

$$N=m\frac{v_{\mathrm{A}}{}^2}{R}-mg\geqq 0 \qquad \text{ゆえに} \quad v_{\mathrm{A}}\geqq\sqrt{gR}$$

したがって，v_{A} の最小値は $\sqrt{gR}$。

以上より，正しいものは ❷。

(補足)　点 A を通過後，小物体の運動は水平投射運動となり，天井から離れる。