1．

図1のように，長さ l の軽い糸に取りつけた質量 m の質点Aが，水平面内を速さ v_0 で等速円運動をしている。糸の他端は水平な天井の点Oに固定され，糸と鉛直方向とのなす角は θ であった。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。

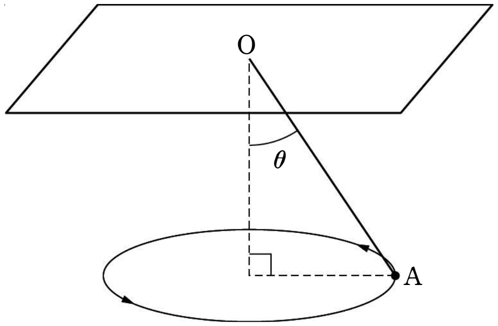


図1

(1)　糸に作用している張力の大きさ F を m，g，θ を用いて表せ。

(2)　v_0 を l，g，θ を用いて表せ。

図2のように，一端を点Oに固定した長さ l の軽い糸に質量 m の質点Bを取りつけ，Oから距離 l 離れた天井から，Bを鉛直下向きにAと同じ速さ v_0 で打ち出した。そうすると，AとBは合体して質量 $2m$ の質点Cとなった。次の問いに答えよ。

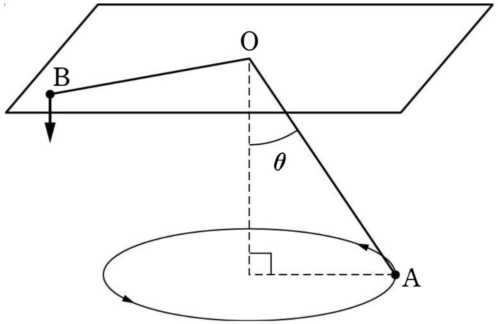


図2

(3)　BがAと合体する直前のBの速さ v_B を l，g，θ を用いて表せ。

(4)　BがAと合体した直後のCの速さ v_C を l，g，θ を用いて表せ。

(5)　AとBの合体で失われる力学的エネルギー K を m，l，g，θ を用いて表せ。

(6)　合体したCは，その後天井に衝突した。Cが天井と衝突する直前のCの速さ v_1 を l，g，θ を用いて表せ。

解答　(1)　$\dfrac{mg}{\cos\theta}$　(2)　$\sqrt{gl\sin\theta\tan\theta}$　(3)　$\sqrt{\dfrac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}gl}$

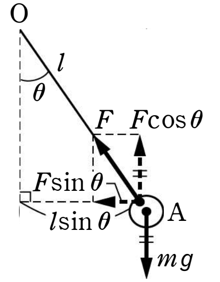
(4)　$\sqrt{\dfrac{gl}{2\cos\theta}}$　(5)　$\dfrac{mgl}{2\cos\theta}$　(6)　$\sqrt{\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}-2\cos\theta\right)gl}$

解説

(1)　質点Aは，水平面内を等速円運動することから，鉛直方向にはたらく力はつりあっているので

$$F\cos\theta-mg=0$$

$$F=\frac{mg}{\cos\theta}$$



図a

(2)　水平面内の等速円運動の運動方程式は

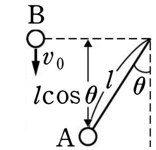
$$m\frac{{v_0}^2}{l\sin\theta}=F\sin\theta$$

これに(1)の答えを用いて

$$m\frac{{v_0}^2}{l\sin\theta}=\frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta$$

$$v_0=\sqrt{gl\sin\theta\tan\theta}$$

(3)　図bのように，BはAと合体するまでに，$l\cos\theta$ の高さを落下する。Bが打ち出されてからAと合体する直前まで，力学的エネルギーは保存されるため



図b

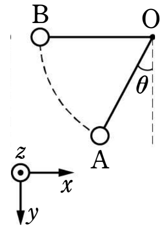
$$\frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2-mgl\cos\theta$$

(2)の答えより

$$v_\mathrm{B}=\sqrt{gl\sin\theta\tan\theta+2gl\cos\theta}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}gl}$$

(4)　図cのように，BがAと合体するまでに運動する平面を，xy 平面とし，Aの等速円運動の向心方向を x 方向，鉛直下向きを y 方向，等速円運動の速度の方向を z 方向とする（⊙は紙面の裏→表の向き）。BがAと合体する直前直後で，運動量の和が等しいため，x，y，z の各成分について



図c

$$m\cdot 0+m\cdot v_\mathrm{B}\cos\theta=2mv_x$$

$$m\cdot 0+m\cdot v_\mathrm{B}\sin\theta=2mv_y$$

$$m\cdot v_0+m\cdot 0=2mv_z$$

これらと，(2)，(3)の答えよりCの速さは

$$v_\mathrm{C}=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}v_\mathrm{B}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}v_\mathrm{B}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{gl}{2\cos\theta}}$$

(5)　合体の際に失われる力学的エネルギーは

$K=$(合体前の運動エネルギーの和)$-$(合体後の運動エネルギーの和)

$$=\left(\frac{1}{2}mv_0{}^2+\frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}{}^2\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_{\mathrm{C}}{}^2\right)$$

$$=\frac{mgl}{\cos\theta}-\frac{mgl}{2\cos\theta}=\frac{mgl}{2\cos\theta}$$

(6)　合体の直後から，C が天井に衝突する直前までの間，C の力学的エネルギーは保存されるので

$$\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_1{}^2+2mgl\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot v_{\mathrm{C}}{}^2$$

これに (4) の答えを用いて，整理すると

$$v_1=\sqrt{\left(\frac{1}{2\cos\theta}-2\cos\theta\right)gl}$$

２．

図 1 のような途中がループしているレールがある。レールの太さは無視できるものとし，ループ BCDE は鉛直面をなす半径 r の円軌道になっている。点 A から初速 0 で出発した質量 m の小球 P の運動を考える。点 A の水平面 GB からの高さを h として，次の (1)〜(9) に答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。

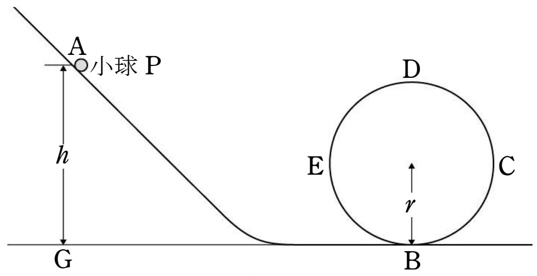


図 1

(1)　最初に点 B を通過するときの小球 P の速さ v_{B} を g，h を用いて表せ。

その後，小球 P はレールにそって点 C，D，E を通過して運動し，再び，点 B に到達した。次の (2)〜(4) について，m，g，h，r のうち必要な記号を用いて答えよ。

(2)　ループの最高点 D における小球 P の速さ v_{D} を求めよ。

(3)　点 D において，小球 P がレールから受ける垂直抗力の大きさ N_{D} を求めよ。

(4)　小球 P がレールから離れずにループを 1 周するための h の最小値 h_1 を求めよ。

次に $h<h_1$ の場合の小球Pの運動を考える。そのとき，図 2 のように小球 P は点 F において，レールから離れ，放物運動を行ったとする。そのとき，FOC のなす角を θ とする ($0°<\theta<90°$)。小球 P がレールから離れた後はレールとは衝突せず，そのまま放物運動を続けるものとする。次の (5)〜(7) について，g，r，θ のうち必要な記号を用いて答えよ。

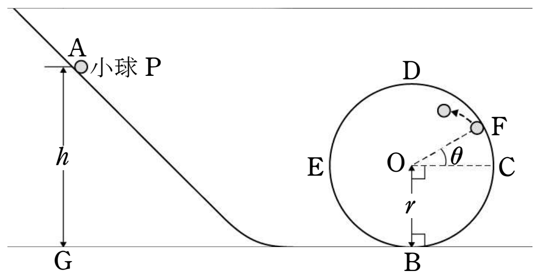


図 2

(5)　小球 P が点 C に到達するための h の最小値 h_2 を求めよ。

(6)　レールから離れる点 F における小球 P の速さ v_{F} を求めよ。

(7)　このとき，点 A の高さは $h=h_{\mathrm{F}}$ であった。高さ h_{F} を求めよ。ただし，$h_1>h_{\mathrm{F}}>h_2$ である。

図2において，$\theta=30^\circ$ であった。小球Pが点Fを離れた瞬間を時刻 $t=0$ とし，その後の時刻 t における小球Pの運動について考える。次の(8)〜(9)について，g，r，t のうち必要な記号を用いて答えよ。

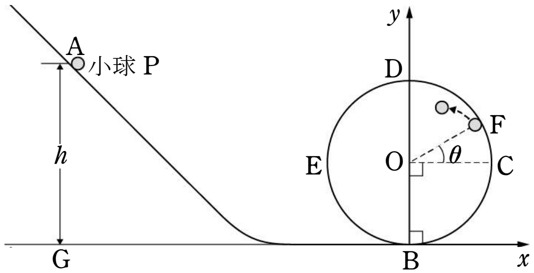


図3

(8)　図3のように点Bを原点とし，水平方向を x 軸(図3の右向きを正とする)，鉛直方向を y 軸(図3の上向きを正とする)とする。小球Pが点Fを離れた後の時刻 t における小球Pの x 座標と y 座標を求めよ。

(9)　$t=T$ において $x=0$ となった。このときの時刻 T と小球Pの y 座標を求めよ。

解答　(1)　$\sqrt{2gh}$　　(2)　$\sqrt{2g(h-2r)}$　　(3)　$\left(\dfrac{2h-5r}{r}\right)mg$　　(4)　$\dfrac{5}{2}r$　　(5)　r

(6)　$\sqrt{gr\sin\theta}$　　(7)　$\dfrac{r}{2}(2+3\sin\theta)$

(8)　x 座標：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r-\dfrac{\sqrt{2gr}}{4}t$，$y$ 座標：$\dfrac{3}{2}r+\dfrac{\sqrt{6gr}}{4}t-\dfrac{1}{2}gt^2$

(9)　T：$\sqrt{\dfrac{6r}{g}}$，y：0

解説

(1)　点Bを重力による位置エネルギーの基準の位置として，点Aと点Bでの力学的エネルギーの保存より

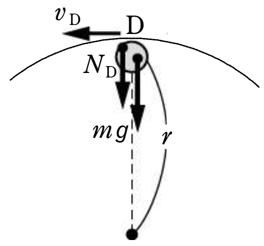
$$mgh=\frac{1}{2}mv_B{}^2 \quad よって \quad v_B=\sqrt{2gh}$$

(2)　点Aと点Dでの力学的エネルギーの保存より

$$mgh=\frac{1}{2}mv_D{}^2+mg\cdot 2r$$

よって　$v_D=\sqrt{2g(h-2r)}$

(3)　点Dでは，小球Pは重力と垂直抗力の合力を向心力として，回転半径 r の円運動をしている。円運動の運動方程式「$m\dfrac{v^2}{r}=f$」より



図a

$$m\frac{v_D{}^2}{r}=N_D+mg$$

よって　$N_D=\dfrac{m}{r}\{\sqrt{2g(h-2r)}\}^2-mg$

$$=\left(\frac{2h-5r}{r}\right)mg$$

(4)　点Dでレールから離れずに通過できればよいので，$N_D\geqq 0$ となる。

$$N_D=\left(\frac{2h-5r}{r}\right)mg\geqq 0$$

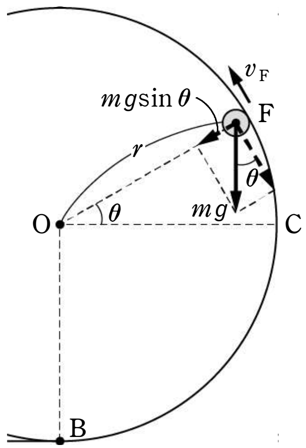
よって　$h\geqq\dfrac{5}{2}r$

ゆえに，h の最小値は　$h_1=\dfrac{5}{2}r$

(5)　点Aと点Cでの力学的エネルギーの保存より

$mgh_2=mgr$　よって　$h_2=r$

(6)　点Fでレールから離れるので，このときレールからの垂直抗力は0となる。したがって，重力の半径方向の成分のみを向心力として円運動している。円運動の運動方程式より



図b

$$m\frac{v_F{}^2}{r}=mg\sin\theta$$

よって

$$v_F=\sqrt{gr\sin\theta}$$

(7)　点Aと点Fでの力学的エネルギーの保存より

$$mgh_F=\frac{1}{2}mv_F{}^2+mgr(1+\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}m(\sqrt{gr\sin\theta})^2+mgr(1+\sin\theta)$$

式を整理して　$h_F=\dfrac{r}{2}(2+3\sin\theta)$

(8)　$t=0$ における小球 P の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると

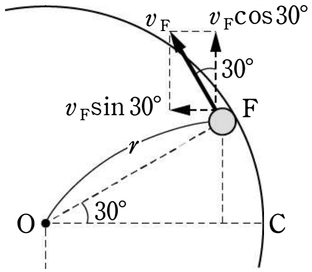


図 c

$$x_0=r\cos 30°$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$
$$y_0=r(1+\sin 30°)$$
$$=\frac{3}{2}r$$

また $t=0$ における速さ v_F は $\theta=30°$ より

$$v_\mathrm{F}=\sqrt{gr\sin 30°}=\sqrt{\frac{gr}{2}}$$

$t=0$ における v_F の x 成分，y 成分をそれぞれ v_{0x}，v_{0y} とすると

$$v_{0x}=-v_\mathrm{F}\sin 30°=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gr}{2}}$$
$$v_{0y}=v_\mathrm{F}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{gr}{2}}$$

小球 P は $(x_0,\ y_0)$ から斜方投射されたと考えて

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}r+v_{0x}t=\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{\sqrt{2gr}}{4}t$$
$$y=\frac{3}{2}r+v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$$
$$=\frac{3}{2}r+\frac{\sqrt{6gr}}{4}t-\frac{1}{2}gt^2$$

(9)　(8) の結果で $t=T$ として

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}r-\frac{\sqrt{2gr}}{4}T=0$$

よって　$T=\sqrt{\dfrac{6r}{g}}$

また

$$y=\frac{3}{2}r+\frac{\sqrt{6gr}}{4}\cdot\sqrt{\frac{6r}{g}}-\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{6r}{g}}\right)^2=0$$