1．

図1のように，長さ l の軽い糸に取りつけた質量 m の質点Aが，水平面内を速さ v_0 で等速円運動をしている。糸の他端は水平な天井の点Oに固定され，糸と鉛直方向とのなす角は θ であった。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。

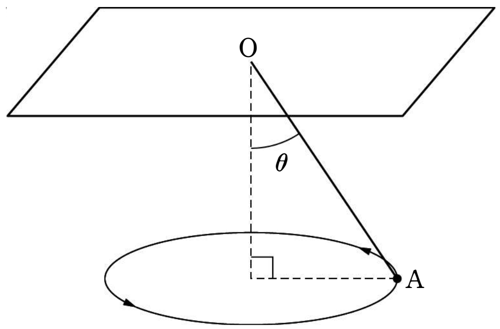

図1

(1)　糸に作用している張力の大きさ F を m，g，θ を用いて表せ。

(2)　v_0 を l，g，θ を用いて表せ。

図2のように，一端を点Oに固定した長さ l の軽い糸に質量 m の質点Bを取りつけ，Oから距離 l 離れた天井から，Bを鉛直下向きにAと同じ速さ v_0 で打ち出した。そうすると，AとBは合体して質量 $2m$ の質点Cとなった。次の問いに答えよ。

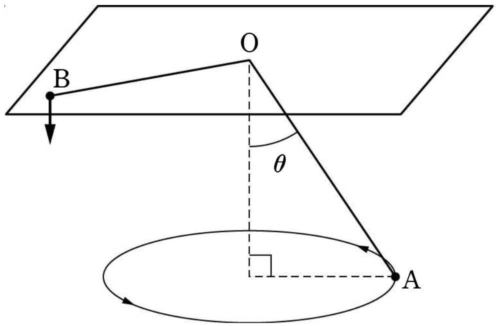

図2

(3)　BがAと合体する直前のBの速さ v_B を l，g，θ を用いて表せ。

(4)　BがAと合体した直後のCの速さ v_C を l，g，θ を用いて表せ。

(5)　AとBの合体で失われる力学的エネルギー K を m，l，g，θ を用いて表せ。

(6)　合体したCは，その後天井に衝突した。Cが天井と衝突する直前のCの速さ v_1 を l，g，θ を用いて表せ。

解答　(1) $\dfrac{mg}{\cos\theta}$　(2) $\sqrt{gl\sin\theta\tan\theta}$　(3) $\sqrt{\dfrac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}gl}$

(4) $\sqrt{\dfrac{gl}{2\cos\theta}}$　(5) $\dfrac{mgl}{2\cos\theta}$　(6) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}-2\cos\theta\right)gl}$

2．

図1のような途中がループしているレールがある。レールの太さは無視できるものとし，ループBCDEは鉛直面をなす半径 r の円軌道になっている。点Aから初速0で出発した質量 m の小球Pの運動を考える。点Aの水平面GBからの高さを h として，次の(1)〜(9)に答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。

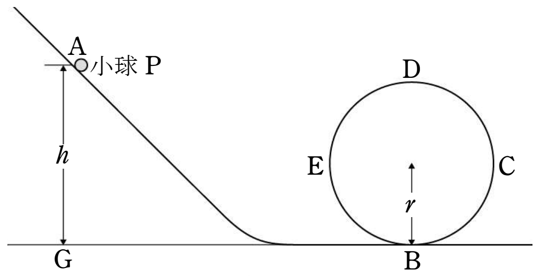

図1

(1)　最初に点Bを通過するときの小球Pの速さ v_B を g，h を用いて表せ。

その後，小球Pはレールにそって点C，D，Eを通過して運動し，再び，点Bに到達した。次の(2)〜(4)について，m，g，h，r のうち必要な記号を用いて答えよ。

(2)　ループの最高点Dにおける小球Pの速さ v_D を求めよ。

(3)　点Dにおいて，小球Pがレールから受ける垂直抗力の大きさ N_D を求めよ。

(4)　小球Pがレールから離れずにループを1周するための h の最小値 h_1 を求めよ。

次に $h<h_1$ の場合の小球Pの運動を考える。そのとき，図2のように小球Pは点Fにおいて，レールから離れ，放物運動を行ったとする。そのとき，FOCのなす角を θ とする $(0°<\theta<90°)$。小球Pがレールから離れた後はレールとは衝突せず，そのまま放物運動を続けるものとする。次の(5)〜(7)について，g，r，θ のうち必要な記号を用いて答えよ。

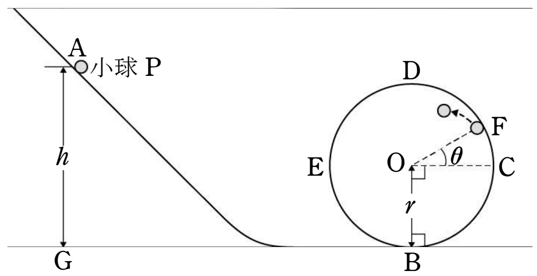

図2

(5)　小球Pが点Cに到達するための h の最小値 h_2 を求めよ。

(6)　レールから離れる点Fにおける小球Pの速さ v_F を求めよ。

(7)　このとき，点Aの高さは $h=h_\mathrm{F}$ であった。高さ h_F を求めよ。ただし，$h_1>h_\mathrm{F}>h_2$ である。

図 2 において，$\theta=30^\circ$ であった。小球 P が点 F を離れた瞬間を時刻 $t=0$ とし，その後の時刻 t における小球 P の運動について考える。次の (8)〜(9) について，g，r，t のうち必要な記号を用いて答えよ。

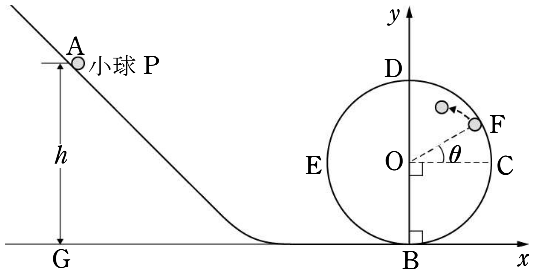

図 3

(8)　図 3 のように点 B を原点とし，水平方向を x 軸 (図 3 の右向きを正とする)，鉛直方向を y 軸 (図 3 の上向きを正とする) とする。小球 P が点 F を離れた後の時刻 t における小球 P の x 座標と y 座標を求めよ。

(9)　$t=T$ において $x=0$ となった。このときの時刻 T と小球 P の y 座標を求めよ。

解答　(1)　$\sqrt{2gh}$　(2)　$\sqrt{2g(h-2r)}$　(3)　$\left(\dfrac{2h-5r}{r}\right)mg$　(4)　$\dfrac{5}{2}r$　(5)　r

(6)　$\sqrt{gr\sin\theta}$　(7)　$\dfrac{r}{2}(2+3\sin\theta)$

(8)　x 座標：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r-\dfrac{\sqrt{2gr}}{4}t$，$y$ 座標：$\dfrac{3}{2}r+\dfrac{\sqrt{6gr}}{4}t-\dfrac{1}{2}gt^2$

(9)　T：$\sqrt{\dfrac{6r}{g}}$，y：0