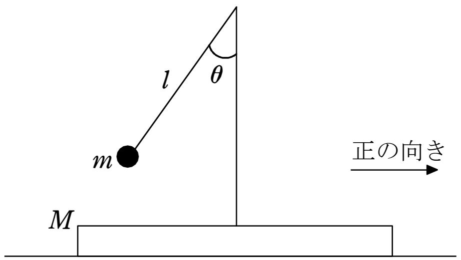
1．

図のように水平でなめらかな床の上に質量 M の台がある。この台には長さ l の糸の先に質量 m の小球がついた振り子が取りつけられており，台の重心と振り子は床に垂直な同一平面内を運動する。台は図の左右の方向に摩擦なしに動くものとし，運動方向は右向きを正とする。なお，振り子の糸はたるまず，台と小球以外の質量はないものとし，空気抵抗は考えない。また，重力加速度の大きさを g とする。



(1)　まず，台が動かない場合を考える。糸が鉛直方向から左に角度 θ 傾いたところで，小球を静止させてから静かにはなした。小球が最初に最下点に到達したときの小球の速度，および，糸の張力の大きさを m，M，l，g，θ の中から必要なものを用いて表せ。

以下では，台が自由に動ける場合を考える。

(2)　小球を最下点に静止させた状態から，ゆっくり台を右向きに加速し一定の加速度 a を保った。その後瞬時に加速をやめて，そのまま台を等速運動させると，台上で小球は振り子運動をした。台に静止した観測者から見たとき，この運動中の小球の速度の最大値を m，M，l，g，a の中から必要なものを用いて表せ。

以下では，床に静止した観測者から見るものとして答えよ。

(3)　静止した台の上で，糸が鉛直方向から左に角度 $\theta=60°$ 傾いたところで，小球を静止させてから静かにはなすと，小球も台も動き始めた。小球が最初に最下点に達したときの小球の速度と台の速度，および，糸の張力の大きさを m，M，l，g の中から必要なものを用いて表せ。

次に，静止した台の上で小球を最下点で静止させた後，撃力により台に水平右方向の初速度 V_0 を瞬時に与えると，最下点から運動を始めた小球は，糸が水平になる高さを通過した。糸が水平になったとき，小球の速度は水平方向と鉛直方向の両方の成分をもちうる。

(4)　水平方向の運動量を考慮することによって，糸が水平になったときの台の速度を m，M，l，g，V_0 の中から必要なものを用いて表せ。

(5)　同じく糸が水平になったときの小球の速度の大きさを m，M，l，g，V_0 の中から必要なものを用いて表せ。

(6)　糸が水平になる高さに小球が達するために，台に与えるべき初速度 V_0 の最小値を m，M，l，g の中から必要なものを用いて表せ。

解答　(1)　速度：$\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$　　張力：$mg(3-2\cos\theta)$

(2)　$\sqrt{2gl\left(1-\dfrac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}\right)}$

(3)　小球の速度：$\sqrt{\dfrac{M}{M+m}gl}$　　台の速度：$-\dfrac{m}{M}\sqrt{\dfrac{M}{M+m}gl}$

張力：$\dfrac{2M+m}{M}mg$

(4)　$\dfrac{M}{M+m}V_0$　　(5)　$\sqrt{\dfrac{M(2M+m)}{(M+m)^2}V_0{}^2-2gl}$　　(6)　$\sqrt{\dfrac{2(M+m)}{M}gl}$

解説

(1)　小球から静かに手をはなした以降の運動で，小球の力学的エネルギーは保存される。最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると，最下点での速さ v に対して

$$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$$

最初に最下点を通過するとき，正の向きに通過するため，このときの速度は

$$v=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

また，小球から見ると糸が伸びる方向の力はつりあっているため，張力の大きさ T に対して

$$T-mg-m\frac{v^2}{l}=0$$

上の答えを用いて整理すると

$$T=mg(3-2\cos\theta)$$

(2)　台の上で小球にはたらく力を考えると，図 a のとおり糸の張力 T' と重力 mg と，台の加速度 $\vec{a}$ に対する慣性力 $-m\vec{a}$ がはたらく。このとき，糸が鉛直方向から傾いた状態で力がつりあう。この角度を α とすると，水平方向と鉛直方向の力のつりあいより，

$$T'\sin\alpha-ma=0\qquad T'\cos\alpha-mg=0$$

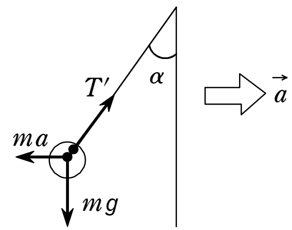


図 a

であり，このとき

$$\tan\alpha=\frac{a}{g}\qquad \sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+g^2}}\qquad \cos\alpha=\frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}$$

である。その後，瞬時に加速をやめると，振り子運動の中心は $\theta=0$ となる。よって，それ以降は初速 0 で角度 $\theta=\alpha$ の位置から静かにはなしたときと同様な運動になる。この運動では小球の力学的エネルギーは保存される。速度が最大になるのは，小球が

最下点を右向きに通過するときで，このときの速度を u とすると，(1) の考え方と同様にして

$$u=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}=\sqrt{2gl\left(1-\frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}\right)}$$

(3)　小球が最初に最下点を通過するとき，小球と台の速度をそれぞれ v'，V' とすると，小球と台の力学的エネルギーは保存されるので

$$\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2=mgl(1-\cos 60^\circ)$$

また，小球と台の速度はそれぞれ水平な方向であるため，2 物体の運動量の和も保存される。よって，水平方向について

$$0=mv'+MV'$$

以上 2 式より，V' を消去して整理すると

$$v'=\sqrt{\frac{M}{M+m}gl}$$

同様に v' を消去して整理すると

$$V'=-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{M}{M+m}gl}$$

台から見た小球の速さは

$$v'-V'=\sqrt{\frac{(M+m)gl}{M}}$$

張力の大きさを T' とすると

$$m\frac{(v'-V')^2}{l}=T'-mg$$

よって　$T'=\dfrac{2M+m}{M}mg$

(4)　台が打ち出された以降，小球と台の水平方向の運動量の和は保存される。糸が水平になったときの台の速度を V とすると，小球の水平方向の速度もこれに等しいため

$$MV_0=(M+m)V$$

$$V=\frac{M}{M+m}V_0$$

(5)　台が打ち出された以降，小球と台の力学的エネルギーは保存される。糸が水平になったときの小球の鉛直上方向の速度を u' とすると，小球の速さは $\sqrt{V^2+u'^2}$ と書ける。小球の最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると

$$\frac{1}{2}MV_0{}^2=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}m(\sqrt{V^2+u'^2})^2+mgl$$

これに (4) の答えを用いて整理すると

$$u'=\sqrt{\frac{M}{M+m}V_0{}^2-2gl}$$

よって，小球の速さは

$$\sqrt{V^2+u'^2}=\sqrt{\frac{M(2M+m)}{(M+m)^2}V_0{}^2-2gl}$$

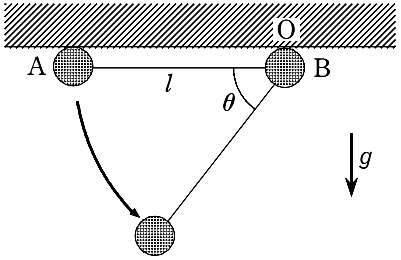
(6)　V_0 が最小値のとき，$u'=0$ となる。(5) の過程を用いてこれを書きかえると

$$\sqrt{\frac{M}{M+m}V_0{}^2-2gl}=0$$

$$V_0=\sqrt{\frac{2(M+m)}{M}gl}$$

2．

質量 m の小球A，Bが長さ l のひもの両端につながれている。図のように水平な天井に小球A，Bを l だけ離して固定した。小球Bを固定した点をOとし，重力加速度の大きさを g とする。小球A，Bの大きさ，ひもの質量，および空気抵抗はないものとする。



〔A〕 小球Bを固定したまま小球Aを静かにはなした。

(1) ひもと天井がなす角度を θ とする。小球Aの速さを θ を用いて表せ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) 小球Aが最下点 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。

(3) 小球Aが最下点 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ に達したときの小球Aの加速度の大きさと向きを求めよ。

〔B〕 小球Aが初めて最下点 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ に達したときに小球Bを静かにはなした。この時刻を $t=0$ とする。

(1) 2個の小球の重心をGとする。小球Bをはなした後の重心Gの加速度の大きさと向きを求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ における，重心Gに対する小球A，Bの相対速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(3) 時刻 $t=0$ における，ひもの張力の大きさを求めよ。

(4) 時刻 $t=0$ における，小球A，Bの加速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(5) 小球Bをはなしてから，初めて小球Aと小球Bの高さが等しくなる時刻を求めよ。

(6) 小球Bをはなした後の時刻 t における小球Aの水平位置を求めよ。ただし，点Oを原点とし，右向きを正とする。

解答 〔A〕 (1) $\sqrt{2gl\sin\theta}$ (2) $3mg$ (3) 大きさ：$2g$ 向き：鉛直上向き

〔B〕 (1) 大きさ：g 向き：鉛直下向き

(2) A 大きさ：$\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，向き：水平右向き

B 大きさ：$\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，向き：水平左向き

(3) mg (4) A 大きさ：0 B 大きさ：$2g$，向き：鉛直下向き

(5) $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{l}{2g}}$ (6) $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}\,t+\dfrac{l}{2}\sin\sqrt{\dfrac{2g}{l}}\,t$

解説

ヒント 〔A〕(3) 求める加速度は，円運動している小球Aの向心加速度である。

〔B〕(1) 2個の小球A，Bからなる物体系に系の外からはたらく力(外力)は重力だけである。

(2) 重心の速度 v_G は，「$v_G=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$」を用いて求める。相対速度は「$v_{BA}=v_A-v_B$」を用いる。

(3) (1)で求めた加速度で運動する重心Gから見ると，小球A，Bには慣性力がはたらき，(2)の結果より等速円運動をしている。慣性力も含めた半径方向の運動方程式を立て，張力を求める。

(5) 重心Gから見ると小球A，Bは等速円運動をしているので，AとBの高さが等しくなるのは，$t=0$ から $\dfrac{1}{4}$ 回転したとき $\left(\dfrac{T}{4}\text{後}\right)$ である。

(6) 等速運動をする重心の座標 x_G と，重心Gから見ると等速円運動をするAの座標 $x_{GA}=x_A-x_G$ を求める。

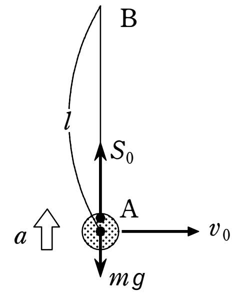
〔A〕(1) 小球Aの速さを v_A とすると，力学的エネルギー保存則より

$$0+mgl\sin\theta=\frac{1}{2}mv_A{}^2+0 \qquad \text{よって} \quad v_A=\sqrt{2gl\sin\theta}$$

(2) (1)の結果と $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ より，最下点での小球Aの速さ v_0 は $v_0=\sqrt{2gl}$

張力の大きさを S_0 とすると，半径方向の運動方程式は，図aより

$$m\frac{v_0{}^2}{l}=S_0-mg$$



図a

$$S_0=mg+\frac{mv_0{}^2}{l}=mg+\frac{m(\sqrt{2gl})^2}{l}=mg+2mg=3mg$$

(3) 小球Aは円運動をしているので，加速度は向心加速度である。よって向きは円の中心Bの向き，すなわち**鉛直上向き**

加速度の大きさ a は，運動方程式「$ma=F$」より

$ma = S_0 - mg = 3mg - mg = 2mg$　　よって　$a = 2g$ ※A←

〔B〕(1)　2 個の小球 A，B からなる物体系に，系の外からはたらく力は重力だけである。よって重心 G の加速度は運動方程式より　$2ma = 2mg$

よって，重心 G の加速度の大きさ a は g，向きは**鉛直下向き**。

(2)　時刻 $t=0$ における小球 A の速度は $v_{\mathrm{A}} = v_0 = \sqrt{2gl}$ で水平右向き。小球 B の速度は $v_{\mathrm{B}} = 0$ (図 b)。よって，重心 G の速度 v_{G} は，

「$v_{\mathrm{G}} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$」より　$v_{\mathrm{G}} = \dfrac{mv_0 + m \times 0}{m+m} = \dfrac{1}{2}v_0$　…… ①

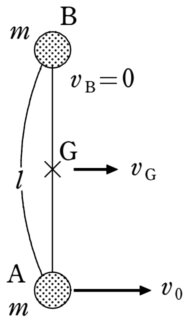


図 b

相対速度の式「$v_{\mathrm{BA}} = v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}$」より，右向きを正として，重心 G に対する小球 A の相対速度 v_{GA} は

$$v_{\mathrm{GA}} = v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{G}} = v_0 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{1}{2}v_0 = \frac{\sqrt{2gl}}{2} = \sqrt{\frac{gl}{2}}$$

よって　大きさは $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，向きは**水平右向き**

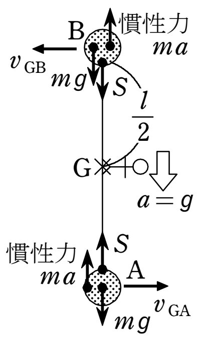
重心 G に対する小球 B の相対速度 v_{GB} は

$$v_{\mathrm{GB}} = v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{G}} = 0 - \frac{1}{2}v_0 = -\frac{1}{2}v_0 = -\sqrt{\frac{gl}{2}}$$

よって　大きさは $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，向きは**水平左向き**

(3)　鉛直下向きに加速度 g で運動する重心 G から見ると，小球 A，B それぞれに上向きの慣性力 ($ma = mg$) がはたらき，下向きの重力と打ち消しあう (図 c)。よって，(2) の結果からわかるように，重心 G から見ると小球 A，B は，張力 S によって速さ $\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$，半径 $r = \dfrac{l}{2}$ の等速円運動をしている。小球 A について，半径方向の運動方程式を立てると

$$m \cdot \frac{\left(\sqrt{\dfrac{gl}{2}}\right)^2}{\dfrac{l}{2}} = S \qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{S = mg}$$

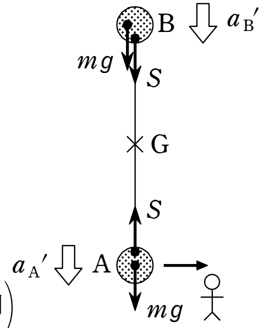


重心 G から見る
図 c

(4)　静止系から見ると，小球 A，B にはたらく力は図 d のようになる。鉛直下向きを正として，小球 A，B の加速度をそれぞれ a_{A}'，a_{B}' とする。小球 A，B の運動方程式は

$ma_{\mathrm{A}}' = mg - S = 0$　　よって　$a_{\mathrm{A}}' = \boldsymbol{0}$

$ma_{\mathrm{B}}' = mg + S = 2mg$　よって　$a_{\mathrm{B}}' = \boldsymbol{2g}$，**鉛直下向き**



静止系から見る
図 d

(5)　重心 G から見ると，小球 A，B が鉛直上にある状態 ($t=0$) から，半径 $\dfrac{l}{2}$ の円軌道を $\dfrac{1}{4}$ 周 $\left(\text{時間にして } \dfrac{1}{4} \text{ 周期}\right)$ すると，A と B の高さが等しくなる (図 e)。

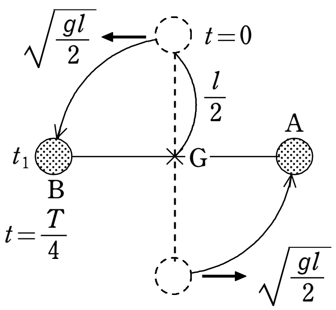


図 e

この円運動の周期 T は，円運動の周期の式「$T = \dfrac{2\pi r}{v}$」より

$$T = \frac{2\pi r}{v_{\mathrm{GA}}} = \frac{2\pi \cdot \dfrac{l}{2}}{\sqrt{\dfrac{gl}{2}}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

求める時間は $\dfrac{T}{4}$ なので　$\dfrac{T}{4} = \dfrac{1}{4}\pi\sqrt{\dfrac{2l}{g}} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{l}{2g}}}$

(6)　重心 G は ① 式より，水平方向には右向きに速さ $\dfrac{1}{2}v_0$ で等速運動をする。

よって，時刻 t における重心の水平位置 x_{G} は

$$x_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}v_0 t = \sqrt{\frac{gl}{2}} \cdot t \qquad \cdots\cdots ②$$

重心 G から小球 A を見ると，速さ $v_{\mathrm{GA}} = \dfrac{1}{2}v_0$，半径 $r = \dfrac{l}{2}$ の等速円運動をしている。その円運動の角速度を ω とすると，「$v = r\omega$」より

$$\omega=\frac{v_{GA}}{r}=\frac{\frac{1}{2}v_0}{\frac{l}{2}}=\frac{v_0}{l}=\frac{\sqrt{2gl}}{l}=\sqrt{\frac{2g}{l}}$$

よって，重心 G から見た小球 A の水平位置 x_{GA} は

$$x_{GA}=\frac{l}{2}\sin\omega t=\frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t \qquad \cdots\cdots ③$$

重心 G から見た小球 A の水平位置 x_{GA} と，小球 A の水平位置 x_A，重心 G の水平位置 x_G の関係は　$x_{GA}=x_A-x_G$ ⋯⋯ ④

②〜④ 式より，A の水平位置 x_A は

$$x_A=x_G+x_{GA}=\sqrt{\frac{gl}{2}}\,t+\frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}\,t$$

←※A　別解　向心加速度であるから　$a=\frac{{v_0}^2}{l}=\frac{2gl}{l}=2g$