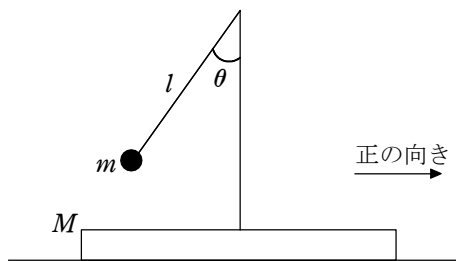


1.

図のように水平でなめらかな床の上に質量 M の台がある。この台には長さ l の糸の先に質量 m の小球がついた振り子を取りつけられており、台の重心と振り子は床に垂直な同一平面内を運動する。台は図の左右の方向に摩擦なしに動くものとし、運動方向は右向きを正とする。なお、振り子の糸はたるまず、台と小球以外の質量はないものとし、空気抵抗は考えない。また、重力加速度の大きさを g とする。



(1) まず、台が動かない場合を考える。糸が鉛直方向から左に角度 θ 傾いたところで、小球を静止させてから静かにはなした。小球が最初に最下点に到達したときの小球の速度、および、糸の張力の大きさを m, M, l, g, θ の中から必要なものを用いて表せ。

以下では、台が自由に動ける場合を考える。

(2) 小球を最下点に静止させた状態から、ゆっくり台を右向きに加速し一定の加速度 a を保った。その後瞬時に加速をやめて、そのまま台を等速運動させると、台上で小球は振り子運動をした。台に静止した観測者から見たとき、この運動中の小球の速度の最大値を m, M, l, g, a の中から必要なものを用いて表せ。

以下では、床に静止した観測者から見るものとして答えよ。

(3) 静止した台の上で、糸が鉛直方向から左に角度 $\theta = 60^\circ$ 傾いたところで、小球を静止させてから静かにはなすと、小球も台も動き始めた。小球が最初に最下点に達したときの小球の速度と台の速度、および、糸の張力の大きさを m, M, l, g の中から必要なものを用いて表せ。

次に、静止した台の上で小球を最下点で静止させた後、撃力により台に水平右方向の初速度 V_0 を瞬時に与えると、最下点から運動を始めた小球は、糸が水平になる高さを通じた。糸が水平になったとき、小球の速度は水平方向と鉛直方向の両方の成分をもちうる。

(4) 水平方向の運動量を考慮することによって、糸が水平になったときの台の速度を m, M, l, g, V_0 の中から必要なものを用いて表せ。

(5) 同じく糸が水平になったときの小球の速度の大きさを m, M, l, g, V_0 の中から必要なものを用いて表せ。

(6) 糸が水平になる高さに小球が達するために、台に与えるべき初速度 V_0 の最小値を m, M, l, g の中から必要なものを用いて表せ。

【解答】 (1) 速度： $\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$ 張力： $mg(3-2\cos\theta)$

(2) $\sqrt{2gl\left(1-\frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}\right)}$

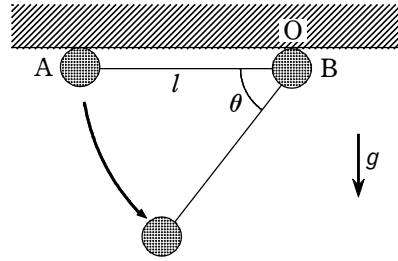
(3) 小球の速度： $\sqrt{\frac{M}{M+m}gl}$ 台の速度： $-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{M}{M+m}gl}$

張力： $\frac{2M+m}{M}mg$

(4) $\frac{M}{M+m}V_0$ (5) $\sqrt{\frac{M(2M+m)}{(M+m)^2}V_0^2-2gl}$ (6) $\sqrt{\frac{2(M+m)}{M}gl}$

2.

質量 m の小球 A, B が長さ l のひもの両端につながれている。図のように水平な天井に小球 A, B を l だけ離して固定した。小球 B を固定した点を O とし、重力加速度の大きさを g とする。小球 A, B の大きさ、ひもの質量、および空気抵抗はないものとする。



[A] 小球 B を固定したまま小球 A を静かにはなした。

(1) ひもと天井がなす角度を θ とする。小球 A の速さを θ を用いて表せ。ただし、

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ とする。}$$

(2) 小球 A が最下点 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。

(3) 小球 A が最下点 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) に達したときの小球 A の加速度の大きさと向きを求めよ。

[B] 小球 A が初めて最下点 ($\theta = \frac{\pi}{2}$) に達したときに小球 B を静かにはなした。この時刻を $t=0$ とする。

(1) 2 個の小球の重心を G とする。小球 B をはなした後の重心 G の加速度の大きさと向きを求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ における、重心 G に対する小球 A, B の相対速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(3) 時刻 $t=0$ における、ひもの張力の大きさを求めよ。

(4) 時刻 $t=0$ における、小球 A, B の加速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(5) 小球 B をはなしてから、初めて小球 A と小球 B の高さが等しくなる時刻を求めよ。

(6) 小球 B をはなした後の時刻 t における小球 A の水平位置を求めよ。ただし、点 O を原点とし、右向きを正とする。

解答 [A] (1) $\sqrt{2gl\sin\theta}$ (2) $3mg$ (3) 大きさ: $2g$ 向き: 鉛直上向き

[B] (1) 大きさ: g 向き: 鉛直下向き

(2) A 大きさ: $\sqrt{\frac{gl}{2}}$, 向き: 水平右向き

B 大きさ: $\sqrt{\frac{gl}{2}}$, 向き: 水平左向き

(3) mg (4) A 大きさ: 0 B 大きさ: $2g$, 向き: 鉛直下向き

(5) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}}$ (6) $\sqrt{\frac{gl}{2}}t + \frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{2g}{l}}t$