1．

図1のように，質量 M の小さなおもりが天井から軽くて伸びない糸でつり下げられ静止している。このおもりに質量 m の小さな鉄球を水平方向から速さ v で打ち込むと，おもりは鉄球と一体となって円弧を描いて上昇し，最高点に達した後，元の位置に戻り始めた。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。おもりは天井にぶつからないものとする。

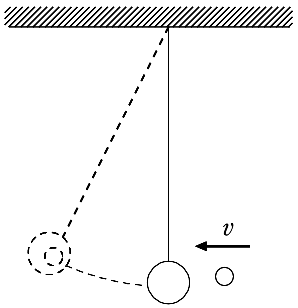


図1

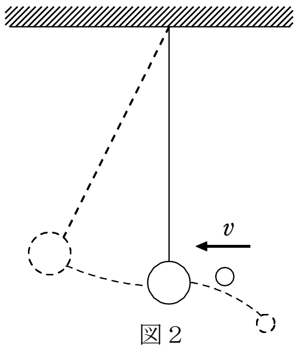


図2

(1)　一体となった直後のおもりの速さはいくらか。

(2)　おもりの最高点の静止位置からの高さはいくらか。

次に，質量 M は同じであるが，つり下げるおもりを別の材質に変え，再度同じ実験を行うと，図2のように，質量 m の鉄球はおもりと弾性衝突してはねかえり，おもりは前回と同様に円弧を描いて上昇した。

(3)　はねかえった直後のおもりの速さはいくらか。

(4)　おもりの最高点の静止位置からの高さは，(2) の高さの何倍か。

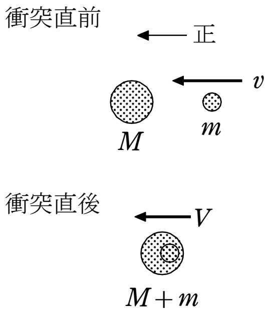
解答　(1) $\dfrac{m}{M+m}v$　(2) $\dfrac{m^2}{2g(M+m)^2}v^2$　(3) $\dfrac{2m}{M+m}v$　(4) 4倍

解説

(1)　衝突前の鉄球が進む向きを正，衝突後のおもりの速さを V とする。衝突前後での運動量の保存を考えて (図a)

$$mv=(M+m)V$$

よって　$V=\dfrac{m}{M+m}v$



図a

(2)　静止位置から最高点までの高さを h とする。

衝突後は力学的エネルギーが保存されているので

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2=(M+m)gh$$

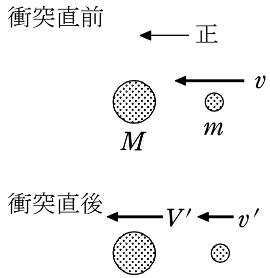
よって　$h=\dfrac{V^2}{2g}=\dfrac{m^2}{2g(M+m)^2}v^2$

(3)　衝突前の鉄球が進む向きを正，衝突直後のおもりの速さを V'，鉄球の速さを v' とする。衝突前後での運動量の保存を考えて (図b)

$$mv=MV'+mv' \quad \cdots\cdots ①$$

また反発係数の式「$e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$$1=-\frac{v'-V'}{v-0} \quad \cdots\cdots ②$$



弾性衝突なので $e=1$

図b

①，② 式より v' を消去し，V' について解くと

$$V'=\frac{2m}{M+m}v$$

(4)　静止位置から最高点までの高さを h' とする。(2) と同様に衝突直後と最高点の間の力学的エネルギーの保存を考えて

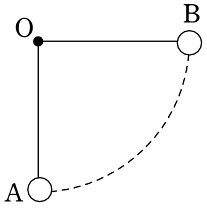
$$\frac{1}{2}MV'^2=Mgh'$$

よって　$h'=\dfrac{V'^2}{2g}=\dfrac{4m^2}{2g(M+m)^2}v^2=4h$

ゆえに　$\dfrac{h'}{h}=4$ 倍

２．

図のように，軽くて伸びない長さ l の２本の糸の一端に同じ質量の小物体A，Bをつけ，他端を点Oに固定した。Aは鉛直につり下げ，Bは水平に糸が張るように手で支えた。手を静かにはなすと，BはAに衝突し，Aは衝突した位置から $\dfrac{l}{2}$ の高さまで上昇した。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。



(1)　AとBが衝突した直後のAの速さはいくらか。答えを次の解答群から１つ選べ。

①　$\dfrac{\sqrt{gl}}{2}$　　②　$\sqrt{\dfrac{gl}{2}}$　　③　$\sqrt{gl}$　　④　$\sqrt{2gl}$　　⑤　$2\sqrt{gl}$

(2)　AとBが衝突した直後のAの加速度の大きさはいくらか。答えを次の解答群から１つ選べ。

①　$\dfrac{g}{2}$　　②　$\dfrac{g}{\sqrt{2}}$　　③　g　　④　$\sqrt{2}\,g$　　⑤　$2g$

(3)　AとBが衝突した後，衝突した位置からBが上昇する高さはいくらか。答えを次の解答群から１つ選べ。

①　$\dfrac{l}{2}$　　②　$\dfrac{l}{\sqrt{2}}$　　③　$(\sqrt{2}-1)l$

④　$(3-2\sqrt{2})l$　　⑤　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}l$　　⑥　$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}l$

(4)　AとBの間の反発係数はいくらか。答えを次の解答群から１つ選べ。

①　$\dfrac{1}{2}$　　②　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　③　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

④　$\sqrt{2}-1$　　⑤　$2-\sqrt{2}$　　⑥　1

解答　(1)　③　　(2)　③　　(3)　⑥　　(4)　④

解説

(1)　衝突前のAの位置を重力による位置エネルギーの基準とし，求める速さを v_A とする。Aは衝突後，高さ $\dfrac{l}{2}$ まで上昇するので，力学的エネルギー保存則より，Aの質量を m として

$$\frac{1}{2}mv_A{}^2=mg\cdot\frac{l}{2}\quad よって\quad v_A=\sqrt{gl}\quad \cdots ③$$

(2)　衝突直後Aは速さ v_A，半径 l の円運動をする。円運動の加速度の式「$a=\dfrac{v^2}{r}$」より

$$a=\frac{v_A{}^2}{l}=\frac{gl}{l}=g\quad \cdots\cdots ③$$

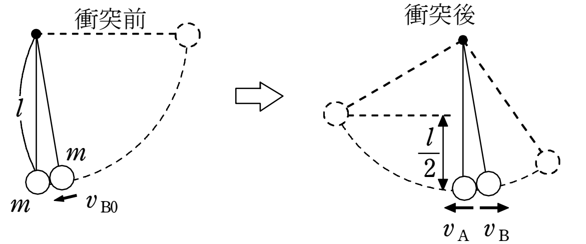
(3)　衝突直前のBの速さを v_{B0} とする。Bの質量はAに等しいので，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_{B0}{}^2=mgl\quad よって\quad v_{B0}=\sqrt{2gl}$$

衝突直後のBの速さを v_B とすると，運動量保存則より

$$m\times 0+m\sqrt{2gl}=m\sqrt{gl}+mv_B$$

よって　$v_B=\sqrt{2gl}-\sqrt{gl}$



求める高さを h とすると，力学的エネルギー保存則より　$\dfrac{1}{2}mv_B{}^2=mgh$

よって

$$h=\frac{v_B{}^2}{2g}=\frac{1}{2g}(\sqrt{2gl}-\sqrt{gl})^2$$
$$=\frac{1}{2g}(2gl-2\sqrt{2}\,gl+gl)$$
$$=\frac{1}{2g}(3-2\sqrt{2})gl$$
$$=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}l\quad \cdots\cdots ⑥$$

(4)　反発係数の式「$e=-\dfrac{v_1'-v_2'}{v_1-v_2}$」より

$$e=-\frac{(\sqrt{2gl}-\sqrt{gl})-\sqrt{gl}}{\sqrt{2gl}}=-\frac{\sqrt{2gl}-2\sqrt{gl}}{\sqrt{2gl}}$$
$$=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1\quad \cdots\cdots ④$$