1．

空所を埋め，問いに答えよ。

［A］ 図 1 のように，なめらかな水平面上を質量 m_1 の物体 A と質量 m_2 の物体 B が，それぞれ一定速度 v_1 と v_2 で運動している。物体 A が，同一直線上を運動している物体 B に衝突した。図に示すように，運動方向に x 軸をとり右向きを正とする。物体 A，B は，ともに衝突後も x 軸上を運動すると考える。衝突により物体 A と物体 B の速度は変化し，それぞれ v_1' と v_2' になった。衝突前後で両物体の運動量の和が保存するので，次式が成りたつ。

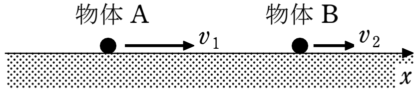


図 1

$$\boxed{\text{ア}} = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \cdots\cdots ①$$

また，反発係数（はねかえり係数）e は衝突前後の相対速度で決まり，

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{\boxed{\text{イ}}} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。反発係数が $e=1$ の場合を弾性衝突とよぶ。弾性衝突の場合，式 ① と式 ② を連立させて解くと，衝突後の速度 v_1' と v_2' は次の式で与えられる。

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots\cdots ③$$

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2} \quad \cdots\cdots ④$$

［B］ 以下では，図 2 のような両端が垂直な壁となっているなめらかな水平面上の 2 つの小球の運動を考える。壁と壁との距離は $2L$ である。小球の運動方向に x 軸をとり，壁と壁の中点を $x=0$ とし，右向きを正とする。小球 A，B（それぞれ質量 m_1，m_2）は，ともに衝突後も x 軸上を運動するものとする。壁は床に固定されており，静止したままである。壁と小球との衝突も小球どうしの衝突も，弾性衝突と考える。衝突にかかる時間はいずれも無視できるとする。また，空気抵抗は無視する。

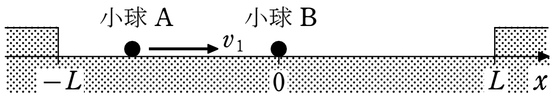


図 2

小球 A，B の質量が等しく $m_1 = m_2 = m$ の場合を考える。力を加えた結果，時刻 $t=0$ に小球 A は $x=-L$ から x 軸の正の向きに一定速度 v_1 で動きだした。この小球は時刻 $T_C = \boxed{\text{ウ}}$ に原点（$x=0$）に静止していた小球 B に衝突した。式 ③ と式 ④ をもとに考えると，この場合の衝突直後の小球 A の速度 V_1 と小球 B の速度 V_2 はそれぞれ，$V_1 = \boxed{\text{エ}}$，$V_2 = \boxed{\text{オ}}$ となる。その後，小球は壁ではねかえり，$x = \boxed{\text{カ}}$ で小球どうしが 2 回目の衝突をした。

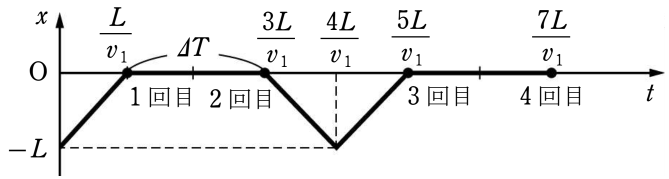
(1) 小球 A の位置 x を，時刻 $t=0$ から小球どうしの 4 回目の衝突の時刻までグラフに示せ。

次に，小球 A の質量が $m_1 = 3m$ で，小球 B の質量が $m_2 = m$ の場合を考える。上と同様，時刻 $t=0$ に $x=-L$ から x 軸の正の向きに一定速度 v_1 で動きだした小球 A は，時刻 T_C に原点（$x=0$）に静止していた小球 B に衝突した。衝突直後の小球 A の速度 U_1 と小球 B の速度 U_2 はそれぞれ $U_1 = \boxed{\text{キ}}$，$U_2 = \boxed{\text{ク}}$ となる。その後，小球は壁ではねかえり，時刻 $t = \boxed{\text{ケ}}$ に $x = \boxed{\text{コ}}$ で，小球どうしが 2 回目の衝突をした。さらに時刻 $t = \boxed{\text{サ}}$ には $x = \boxed{\text{シ}}$ で小球どうしが 3 回目の衝突をした。

(2) 小球 A の位置 x を，時刻 $t=0$ から小球どうしの 4 回目の衝突の時刻までグラフに示せ。

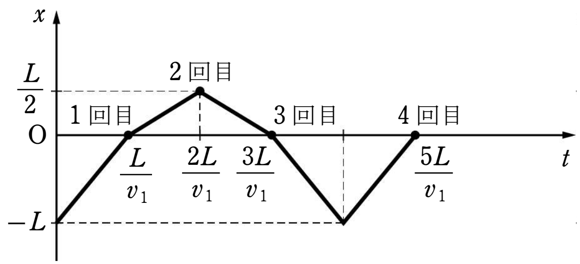
解答 ［A］（ア） $m_1 v_1 + m_2 v_2$ （イ） $v_1 - v_2$ ［B］（ウ） $\frac{L}{v_1}$ （エ） 0 （オ） v_1

（カ） 0 (1)



（キ） $\frac{v_1}{2}$ （ク） $\frac{3}{2}v_1$ （ケ） $\frac{2L}{v_1}$ （コ） $\frac{L}{2}$ （サ） $\frac{3L}{v_1}$ （シ） 0

(2)



解説

［A］（ア） 衝突前の運動量の和なので

$$\boldsymbol{m_1 v_1 + m_2 v_2}$$

（イ） 衝突前の物体 B に対する物体 A の相対速度なので

$$\boldsymbol{v_1 - v_2}$$

［B］（ウ） 等速直線運動の式「$x = vt$」より

$L = v_1 T_C$　　よって　$T_C = \dfrac{L}{v_1}$

(エ)　③ 式において，$v_1' = V_1$，$m_1 = m_2 = m$，$v_2 = 0$

とすると　$V_1 = \dfrac{(m-m)v_1 + 2m \times 0}{m+m} = 0$

(オ)　④ 式において，$v_2' = V_2$，$m_1 = m_2 = m$，$v_2 = 0$

とすると　$V_2 = \dfrac{2mv_1 - (m-m) \times 0}{m+m} = v_1$

参考　質量が等しい 2 球が弾性衝突すると速度交換をする。

(カ)　$x=0$ で弾性衝突後，小球 A はその位置で静止する。小球 B は x 軸正の向きに v_1 で進み，壁で弾性衝突後，x 軸負の向きに v_1 でもどってくる。そして $x=0$ で静止している A に再び衝突する。

(1)　小球 A も B も運動しているときの速さは v_1 で (図 a)，衝突してから再衝突するまで $2L$ 進む。衝突してから次の衝突までの時間を $\varDelta T$ とすると，等速直線運動の式「$x=vt$」　より

$2L = v_1 \varDelta T$　　よって　$\varDelta T = \dfrac{2L}{v_1}$

したがって 1 回目の衝突後 $\varDelta T$ ごとに衝突を繰り返し，A は $-L \leqq x \leqq 0$，B は $0 \leqq x \leqq L$ の領域を運動する。このことより A の位置は 図 b のように変化する。

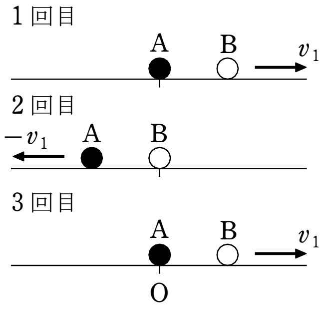


図 a

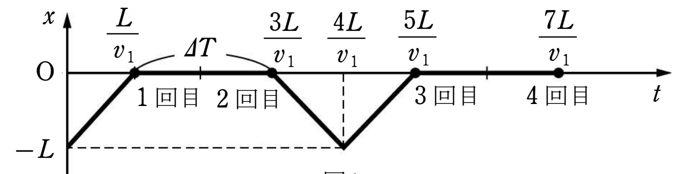


図 b

参考　B の位置は図 c のようになる。

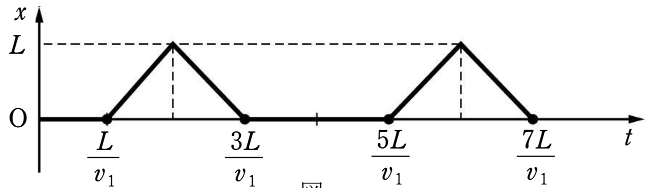


図 c

(キ)　③ 式において，$v_1' = U_1$，$m_1 = 3m$，$m_2 = m$，$v_2 = 0$ とすると

$U_1 = \dfrac{(3m-m)v_1 + 2m \times 0}{3m+m} = \dfrac{v_1}{2}$

(ク)　④ 式において，$v_2' = U_2$，$m_1 = 3m$，$m_2 = m$，$v_2 = 0$ とすると

$U_2 = \dfrac{2 \times 3m \times v_1 - (3m-m) \times 0}{3m+m} = \dfrac{3}{2}v_1$

(ケ)　小球 B は壁と弾性衝突するので衝突の前後で速さは変化しない (向きは x 軸負の向き)。1 回目から 2 回目の衝突までの時間を t_2 とすると，その間に A，B が運動した距離の和は $2L$ となるので (図 d)，等速直線運動の式「$x=vt$」を利用して

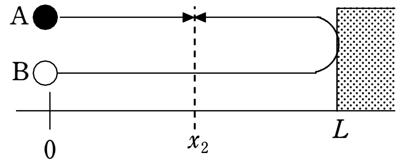


図 d

$|U_1|t_2 + |U_2|t_2 = 2L$

よって　$t_2 = \dfrac{2L}{U_1 + U_2} = \dfrac{L}{v_1}$

求める時刻は　$t = T_C + t_2 = \dfrac{L}{v_1} + \dfrac{L}{v_1} = \dfrac{2L}{v_1}$

(コ)　2 回目の衝突位置を $x = x_2$ とすると，A についての等速直線運動の式「$x=vt$」より

$x_2 = U_1 t_2 = \dfrac{v_1}{2} \cdot \dfrac{L}{v_1} = \dfrac{L}{2}$

(サ)　2 回目の衝突後の小球 A，B の速度をそれぞれ U_1'，U_2' とすると，③ 式より

$$U_1' = \frac{(3m-m) \times U_1 + 2m \times (-U_2)}{3m+m}$$

$$= \frac{2m \times \frac{v_1}{2} - 2m \times \frac{3v_1}{2}}{4m}$$

$$= \frac{mv_1 - 3mv_1}{4m} = -\frac{v_1}{2}$$

④ 式より

$$U_2' = \frac{2 \times 3m \times U_1 - (3m-m) \times (-U_2)}{3m+m}$$

$$= \frac{6m \times \frac{v_1}{2} + 2m \times \frac{3v_1}{2}}{4m}$$

$$= \frac{3mv_1 + 3mv_1}{4m} = \frac{3}{2}v_1$$

3回目の衝突は，A と B の位置が等しくなったときに起こる (図 e)。B が $x=L$ の壁で衝突してから $x=-L$ の壁で衝突するまでの間に，B は必ず A に追いつく。2回目から3回目の衝突までの時間をt_3として，A の座標＝B の座標を考えると

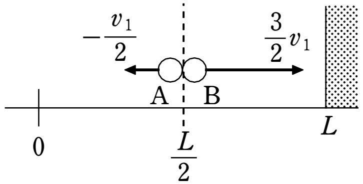


図 e

$$\frac{L}{2}+U_1{}'t_3=\left(\frac{L}{2}+L\right)-U_2{}'t_3$$

$$\frac{L}{2}-\frac{v_1}{2}t_3=\frac{3}{2}L-\frac{3}{2}v_1t_3$$

$$v_1t_3=L$$

よって　$t_3=\frac{L}{v_1}$

求める時刻は　$t=T_C+t_2+t_3=\frac{L}{v_1}+\frac{L}{v_1}+\frac{L}{v_1}=\boldsymbol{\frac{3L}{v_1}}$

(シ)　3回目の衝突位置を x_3 とすると小球 A について考えて

$$x_3=\frac{L}{2}+U_1{}'t_3=\frac{L}{2}-\frac{v_1}{2}\cdot\frac{L}{v_1}=\boldsymbol{0}$$

(2)　3回目の衝突後の小球 A，B の速さを $U_1{}''$，$U_2{}''$ とすると，③ 式より

$$U_1{}''=\frac{(3m-m)\times\left(-\frac{v_1}{2}\right)+2m\times\left(-\frac{3v_1}{2}\right)}{3m+m}$$

$$=\frac{2m\times\left(-\frac{v_1}{2}\right)-2m\times\left(\frac{3v_1}{2}\right)}{4m}$$

$$=\frac{-mv_1-3mv_1}{4m}=-v_1$$

④ 式より

$$U_2{}''=\frac{2\times3m\times\left(-\frac{v_1}{2}\right)-(3m-m)\times\left(-\frac{3v_1}{2}\right)}{3m+m}$$

$$=\frac{-3mv_1+3mv_1}{4m}=0$$

3回目の衝突後，B は $x=0$ で静止してしまうので，4回目の衝突は A が $x=-L$ の壁で衝突し，再び $x=0$ にもどってきたときに起こる。3回目から4回目の衝突までの時間を t_4 とすると，その間に A は $2L$ 運動するので等速直線運動の式「$x=vt$」を

利用して

$$2L=|U_1{}''|t_4$$

$$t_4=\frac{2L}{|U_1{}''|}=\frac{2L}{v_1}$$

よって，A の位置 x は 図 f のように変化する。

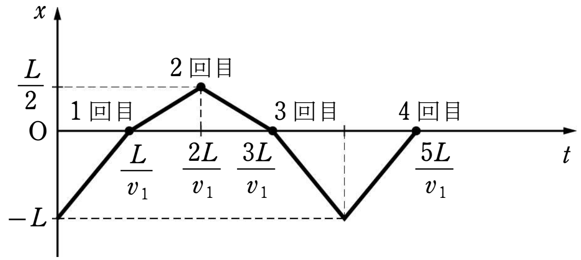


図 f

参考　B の位置は図 g のようになる。

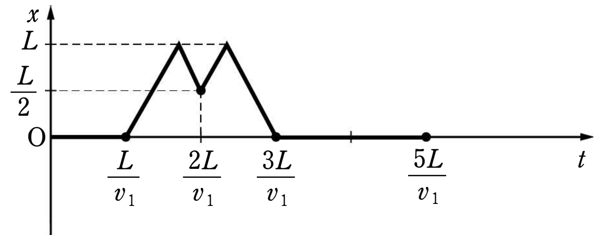


図 g

2．

図1，2のように，床から高さ A の位置で，質量 m の小さなボールを水平に速さ V で投げた。ボールがちょうど入る大きさのかごが，投げた場所から水平距離 B，床から高さ C の位置にある。ただし，$C<A$ であり，ボールはかごの上面からのみ入るものとする。ボールと床の間の反発係数(はねかえり係数)は e $(0<e<1)$ で，床は水平でなめらかとする。図中のPとQはボールの軌道を表す。

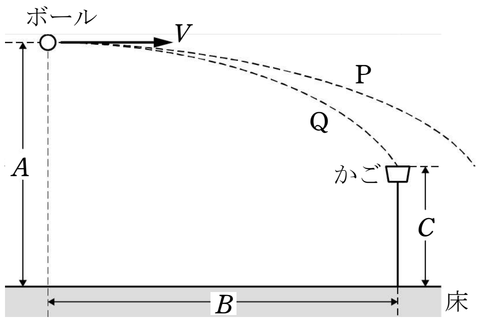


図1

重力加速度の大きさが g で，ボールの回転や空気抵抗は無視できるものとして，次の問いに答えよ。

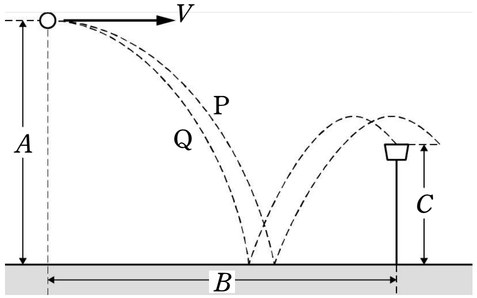


図2

(1)　図1において，投げたボールがPの軌道を通り，かごの真上を通過した。ボールを投げてからかごの真上に達するまでの時間と，このときのボールの床からの高さを求めよ。

(2)　図1において，ボールがQの軌道を通り，直接かごに入った。このときの V を求めよ。

(3)　図2において，投げたボールがPの軌道を通って床に当たり，はねかえった。ボールを投げてから床に当たるまでの時間と，はねかえった直後のボールの鉛直方向の速さを求めよ。

(4)　図2において，ボールがQの軌道を通り，床に1回はねかえってからかごに入った。ボールがかごに入るための e の値の範囲と，このときの V を求めよ。

解答　(1)　時間：$\dfrac{B}{V}$　　高さ：$A-\dfrac{gB^2}{2V^2}$　　(2)　$B\sqrt{\dfrac{g}{2(A-C)}}$

(3)　時間：$\sqrt{\dfrac{2A}{g}}$　　速さ：$e\sqrt{2gA}$

(4)　範囲：$\sqrt{\dfrac{C}{A}}<e<1$　　V：$\sqrt{\dfrac{g}{2}}\dfrac{B}{(1+e)\sqrt{A}+\sqrt{e^2A-C}}$

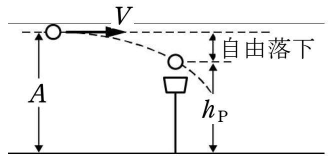
解説

(1)　ボールを投げてからかごの真上に達するまでの時間を t_P，このときのボールの床からの高さを h_P とする。ボールは水平投射されたので，水平方向は等速直線運動の式「$x=vt$」より

$$B=Vt_P$$

よって　$t_P=\dfrac{B}{V}$

また鉛直方向は自由落下の式「$y=\dfrac{1}{2}gt^2$」を利用して(図a)



図a

$$\frac{1}{2}gt_P{}^2+h_P=A$$

よって　$h_P=A-\dfrac{1}{2}gt_P{}^2=A-\dfrac{gB^2}{2V^2}$

(2)　ボールがかごに達するまでの時間を t_Q とすると，t_P と同様に

$$t_Q=t_P=\frac{B}{V}$$

この間に鉛直方向に $A-C$ 落下したことになるので自由落下の式「$y=\dfrac{1}{2}gt^2$」より

$$A-C=\frac{1}{2}gt_Q{}^2=\frac{gB^2}{2V^2}$$

よって　$V^2=\dfrac{gB^2}{2(A-C)}$

$$V=B\sqrt{\frac{g}{2(A-C)}}$$

(3)　ボールを投げてから床に当たるまでの時間を t_1，床に当たる直前，直後のボールの鉛直方向の速さをそれぞれ v_1，v_1' とする。鉛直方向は自由落下の式「$y=\dfrac{1}{2}gt^2$」より

$A=\dfrac{1}{2}gt_1{}^2$　　よって　$t_1=\sqrt{\dfrac{2A}{g}}$

また「$v=gt$」より　$v_1=gt_1=g\sqrt{\dfrac{2A}{g}}=\sqrt{2gA}$

床との反発係数の式「$e=\dfrac{|v'|}{|v|}$」より

$$v_1'=ev_1=e\sqrt{2gA}$$

(4)　ボールがかごの上面から入るので，1回はねかえり最高点に達してから2回目に床に達するまでの間(放物運動が下降している間)で，かごに入ると考えられる。

ボールが1回はねかえってからかごに入るまでの時間を t_2，1回はねかえってから最高点に達するまでの時間を t_2' とする (図 b)。最高点に達したとき速度の鉛直成分が0になるので，等加速度直線運動の式「$v=v_0+at$」より　$0=v_1'-gt_2'$

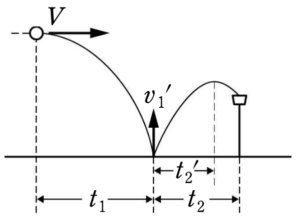


図 b

よって

$$t_2'=\frac{v_1'}{g}=\frac{e\sqrt{2gA}}{g}=e\sqrt{\frac{2A}{g}}$$

運動の対称性より，1回はねかえってから2回目に床に達するまでの時間は $2t_2'$ なので

$$t_2'<t_2<2t_2'$$

$$e\sqrt{\frac{2A}{g}}<t_2<2e\sqrt{\frac{2A}{g}} \quad \cdots\cdots ①$$

一方，1回はねかえってからの運動で等加速度直線運動の式「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」を考えると

$$C=v_1't_2-\frac{1}{2}gt_2{}^2$$

$$C=e\sqrt{2gA}\,t_2-\frac{1}{2}gt_2{}^2$$

$$gt_2{}^2-2e\sqrt{2gA}\,t_2+2C=0$$

解の公式と ① 式より

$$t_2=\frac{e\sqrt{2gA}+\sqrt{e^2\cdot 2gA-2gC}}{g}=e\sqrt{\frac{2A}{g}}+\sqrt{\frac{2(e^2A-C)}{g}}$$

また ① 式を満たすためには $e^2A-C>0$ が成りたつ必要があり，かつ $0<e<1$ であるので

$$\sqrt{\frac{C}{A}}<e<1$$

ボールが投げられてからかごに入るまでを考えると　$B=V(t_1+t_2)$

よって　$V=\dfrac{B}{t_1+t_2}$

$$=\frac{B}{\sqrt{\dfrac{2A}{g}}+e\sqrt{\dfrac{2A}{g}}+\sqrt{\dfrac{2(e^2A-C)}{g}}}$$

$$=\sqrt{\frac{g}{2}}\,\frac{B}{(1+e)\sqrt{A}+\sqrt{e^2A-C}}$$