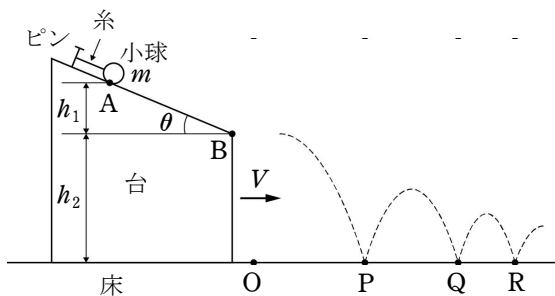


1.

図のように、水平でなめらかな床の上で、台を左から右へ一定の速度で移動させている。台の上面はなめらかな斜面になっており、小球はピンと糸を用いて斜面上につるされ、斜面上の点 A で台に対して静止している。斜面の右端の点 B が床上の点 O の真上に達したときに小球



は糸からはずれ、そのあと斜面を転がることなくすべり落ち、点 B から飛び出した。飛び出した小球は、床上の点 P で床に衝突してはねかえり、ふたたび床上の点 Q で床に衝突してはねかえり、さらに床上の点 R で床に衝突してはねかえった。なお、小球が糸につるされている時から点 R で床に衝突するまでの間、台の速度は常に一定である。小球の質量を m [kg]、台の速さを V [m/s]、斜面の傾斜角を θ [rad]、点 B から点 A までの高さを h_1 [m]、床から点 B までの高さを h_2 [m]、小球と床の間の反発係数を e 、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。小球と床の間に摩擦はないものとし、小球にはたらく空気抵抗は無視できるものとする。次の問いに答えよ。答えには、 m 、 V 、 θ 、 h_1 、 h_2 、 e 、 g のうちの必要な記号を用いよ。

- (1) 小球が点 A から点 B まですべり落ちる間に台が移動する距離を求めよ。
- (2) 小球が点 B を飛び出す瞬間の台に対する小球の速度を \vec{v}_1' [m/s] とする。
 - (a) \vec{v}_1' の水平方向成分を求めよ。ただし、図の右向きを正とする。
 - (b) \vec{v}_1' の鉛直方向成分を求めよ。ただし、鉛直下向きを正とする。
- (3) 小球が点 P で床に衝突する直前の床に対する小球の速度を \vec{v}_2 [m/s] とする。
 - (a) \vec{v}_2 の水平方向成分を求めよ。ただし、図の右向きを正とする。
 - (b) \vec{v}_2 の鉛直方向成分を求めよ。ただし、鉛直下向きを正とする。
- (4) PQ 間の水平距離を求めよ。
- (5) 小球が点 P から点 Q まで運動する間の最高点の床からの高さ H [m] を求めよ。
- (6) 小球が点 Q から点 R まで運動する間の最高点の床からの高さは (5) の H の何倍か求めよ。

解答 (1) $V\sqrt{\frac{2h_1}{g\sin^2\theta}}$ [m]

- (2) (a) $\sqrt{2gh_1}\cos\theta$ [m/s] (b) $\sqrt{2gh_1}\sin\theta$ [m/s]
- (3) (a) $\sqrt{2gh_1}\cos\theta + V$ [m/s] (b) $\sqrt{2g(h_2 + h_1\sin^2\theta)}$ [m/s]
- (4) $2e(\sqrt{2gh_1}\cos\theta + V)\sqrt{\frac{2(h_2 + h_1\sin^2\theta)}{g}}$ [m]
- (5) $e^2(h_2 + h_1\sin^2\theta)$ [m] (6) e^2 倍

2.

辺 AB の長さが d でこれに垂直な辺 BC の長さが $2d$ の、長方形の平面 $ABCD$ を底面とする直方体の内壁面をもつ箱が、底面が水平となるように固定されている。この箱の内部にある質量 m の小球 1 と質量 $4m$ の小球 2 の、平面 $ABCD$ 上における運動を考える。

小球 1 と小球 2 の間の反発係数(はねかえり係数)を e で表し、これは $\frac{1}{4} < e \leq 1$ を満たす

とする。また、箱の内壁面に対する小球 1 と小球 2 の反発係数はそれぞれ e と $\frac{e}{2}$ である

とする。2つの小球の大きさはどちらも長さ d に比べて無視できるほど小さく、どちらの小球も質点として扱う。また、これらの小球の表面に生じる摩擦の影響はすべて無視できるものとする。

まず、小球 1 だけの運動を考える。図 1 のように辺 AB の中点 P に小球 1 を置き、平面 $ABCD$ 上で辺 AB と θ の角をなす向きに、大きさが v の初速度を与えたところ、小球 1 は平面 $ABCD$ から一度も離れることなく運動した。

- (1) $\theta = 90^\circ$ の場合、点 P を出発した小球 1 は、対向する辺 CD の中点 Q で最初に壁面に衝突した。この衝突直後の小球 1 の速さ v_Q を求めよ。
- (2) (1) において点 Q で壁面に衝突した小球 1 は、そこで一度だけはねかえされた後に、出発点 P にもどってきた。小球 1 が点 P を出発してから再び点 P にもどるまでの時間 T_Q を、 d, e, v を用いて書き表せ。
- (3) 一方、 $0 < \tan \theta < 4$ を満たす θ の場合には、点 P を出発した小球 1 は、辺 BC 上の点 R で最初に壁面に衝突した。この衝突直後の小球の速さ v_R を、 e, θ, v を用いて書き表せ。

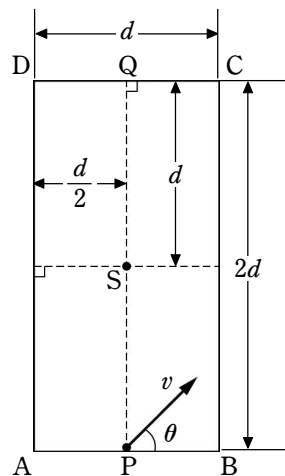


図 1

- (4) (3) において点 R で壁面に衝突した小球 1 は、そこで一度だけはねかえされた後に、長方形 $ABCD$ の中心点 S を通過した。この場合の θ を θ_S としたとき、 $\tan \theta_S$ を e のみを用いて書き表せ。

次に、小球 1 と小球 2 の運動を考える。点 S に小球 2 を静止させた状態で、これまでと同様に辺 AB の中点 P に小球 1 を置き、平面 $ABCD$ 上で辺 AB と θ の角をなす向きに、大きさが v の初速度を小球 1 に与えた。

- (5) $\theta = 90^\circ$ の場合、点 P を出発した小球 1 は、点 S で小球 2 と衝突してはねかえされ、壁面とは一度も衝突することなく点 P にもどってきた。小球 1 が点 P を出発してから再び点 P にもどるまでの時間 T_S を求めよ。
- (6) 一方、(4) の角 θ_S の向きに初速度を与えた場合、点 P を出発した小球 1 は、辺 BC

上の点 R で壁面に衝突して一度だけはねかえされた後に、点 S で小球 2 と衝突した。小球 2 との衝突の後に、小球 1 は再び辺 BC 上の点 R で壁面に衝突して一度だけはねかえされてから、辺 AB 上の点 P' に到達した。点 P と点 P' の間の距離 $\overline{PP'}$ を、 d, e を用いて書き表せ。

- (7) (6) において小球 1 が点 S で小球 2 と衝突した後に、小球 2 は辺 AD 上の点で壁面に衝突して一度だけはねかえされてから、辺 CD 上の点 Q' に到達した。点 Q と点 Q' の間の距離 $\overline{QQ'}$ を、 d, e を用いて書き表せ。

再び小球 1 だけの運動を考える。ただし今度は、辺 AB と辺 CD をどちらも水平に保ったまま、図 2 のように辺 BC と辺 AD が水平面と 30° の角をなした状態で、辺 AB よりも辺 CD のほうが高くなるように箱が固定されている場合を考える。これまでと同様に、辺 AB の中点 P に小球 1 を置き、傾いた平面 $ABCD$ 上で辺 AB と θ の角をなす向きに、大きさが v の初速度を与えたところ、小球 1 は平面 $ABCD$ から一度も離れることなく運動した。ただし、鉛直下向きの重力加速度の大きさを g として、以下では $e = \frac{1}{3}$ とする。

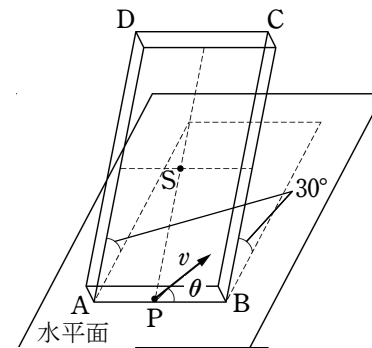


図 2

- (8) 点 P を出発した小球 1 は、辺 BC 上の点 R' で最初に壁面に衝突した。この衝突直後の小球 1 の速度の辺 BC にそった成分が、斜面下向きとならないための v の最小値 v_0 を求めよ。また、初速度の大きさが v_0 の場合に、点 B と点 R' の間の距離 $\overline{BR'}$ を、 d, θ を用いて書き表せ。
- (9) 辺 BC 上の点 R' で最初に壁面に衝突した小球 1 は、そこで一度だけはねかえされた後に点 S を通過した。この場合の v を v_1 としたとき、 v_1 を、 d, θ, g を用いて書き表せ。
- (10) (9) において点 R' から点 S への小球 1 の運動の軌跡は、上に凸の放物線の一部となる。点 S がこの放物線の頂点となる場合に、出発点 P における小球 1 の運動エネルギー K を求めよ。

【解答】 (1) ev (2) $\frac{2d}{v} \left(1 + \frac{1}{e}\right)$ (3) $v\sqrt{\sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta}$ (4) $\frac{2e}{1+e}$

(5) $\frac{d}{v} \frac{4(e+1)}{4e-1}$ (6) $\frac{d}{2}(1-e^2)$ (7) $\frac{d}{2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$

$$(8) \quad v_0 : \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gd}{\sin \theta \cos \theta}} \quad \overline{\text{BR}'} : \frac{d}{4} \tan \theta \quad (9) \quad \frac{1}{\cos \theta} \sqrt{\frac{gd}{2 \tan \theta - 1}}$$

$$(10) \quad mgd$$