１．

無重力で真空の宇宙空間を，質量 m_1 の機体に質量 m_2 の燃料を積んだロケットが速さ v_0 で進んでいる。

(1)　ロケットは質量 m_2 の全燃料を燃焼させて，燃料のガスを機体に対する速さ u で後方に一気に噴射させた。その結果，機体の速さが v_0 から v に加速された。ただし，u は速さ v の機体に対する速さである。このとき，v を v_0，u，m_1，m_2 を用いて表せ。

(2)　その後，ロケットは宇宙空間に静止した質量 M の小惑星に衝突した。ロケットは貫通することなく小惑星の内部にとどまり，小惑星は回転することなく速さ V で動きだした。その速さ V を M，m_1，v を用いて表せ。

(3)　ロケットは，衝突の間に一定の力 F を受け，距離 L だけ小惑星にめり込んだ。力 F を m_1，M，v，L を用いて表せ。

解答　(1)　$v_0+\dfrac{m_2}{m_1+m_2}u$　　(2)　$\dfrac{m_1}{m_1+M}v$　　(3)　$\dfrac{m_1Mv^2}{2(m_1+M)L}$

解説

(1)　ロケットの進む向きを正とし，宇宙空間から見たガスの速度を u_2 とする。ガスはロケットから見て速さ u で遠ざかるから，ガスの相対速度 $(u_{ロ\to ガ}=u_{ガ}-v_{ロ})$ は，向きも考慮すると

$$-u=u_2-v \quad \cdots\cdots ①$$

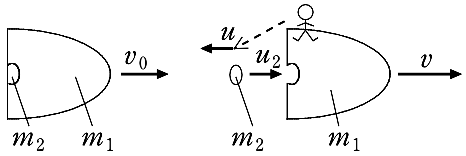


図 a

また，ガス放出前後での運動量の保存の式は

$$(m_1+m_2)v_0=m_1v+m_2u_2 \quad \cdots\cdots ②$$

① 式の u_2 を ② 式に代入して

$$(m_1+m_2)v_0=m_1v+m_2v-m_2u$$

よって　$v=v_0+\dfrac{m_2}{m_1+m_2}u$

(2)　衝突する前後で運動量は保存するから

$$m_1v+0=(m_1+M)V$$

よって　$V=\dfrac{m_1}{m_1+M}v$

(3)　一定の力 F を受けて L だけめり込んだから，その力がした仕事は $-F\cdot L$ である。

衝突前後での，運動エネルギーと仕事の関係より

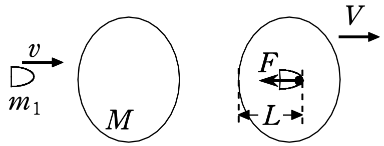


図 b

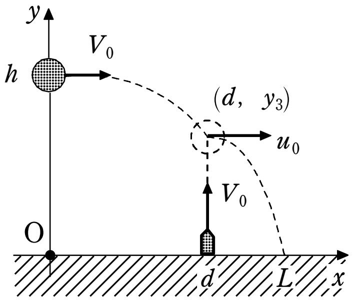
$$\frac{1}{2}m_1v^2+0+(-F\cdot L)=\frac{1}{2}(m_1+M)V^2$$

よって　$FL=\dfrac{1}{2}m_1v^2\left(1-\dfrac{m_1}{m_1+M}\right)=\dfrac{m_1Mv^2}{2(m_1+M)}$

ゆえに　$F=\dfrac{m_1Mv^2}{2(m_1+M)L}$

2．

図のように，水平面をなす地表から高さ h〔m〕の所より，質量 M〔kg〕の物体が時刻 $t=0$ s において速さ V_0〔m/s〕で水平に投げだされた。一方，地上から質量 m〔kg〕の弾丸が速さ V_0 で，物体の発射と同時に鉛直上向きに発射された。その後，弾丸は物体に命中し，一体となった。重力加速度の大きさを g〔$\mathrm{m/s^2}$〕とする。また，$V_0>\sqrt{gh}$ とする。物体および弾丸の大きさを考えないものとし，空気の抵抗を無視する。物体の最初の位置を通る鉛直線と地表の交点を原点 O とし，物体の初速度の方向を x 軸，鉛直上向きを y 軸とする。



弾丸が物体に命中するまでの間について，次の問いに答えよ。

(1) 時刻 t での，物体の位置の座標 $(x_1,\ y_1)$〔m〕を記せ。

(2) 弾丸は座標 $(d,\ 0)$〔m〕から発射されるものとする。時刻 t での，弾丸の位置の座標を $(d,\ y_2)$〔m〕とする。y_2 を記せ。

弾丸が物体に命中した時刻を t_3〔s〕とする。命中直後，一体となった物体の速度の方向は水平になった。次の問いには，g，h，M，V_0 のみを用いて答えよ。

(3) t_3 および d を求めよ。弾丸が物体に命中したときの，物体と弾丸の座標を $(d,\ y_3)$〔m〕とする。y_3 を求めよ。

(4) 弾丸が物体に命中する直前の，物体と弾丸のそれぞれの速度の x 成分と y 成分を求めよ。

(5) 弾丸が物体に命中した直後の物体の速度の x 成分 u_0〔m/s〕と，m を求めよ。

(6) 命中後，物体は運動を続け，地上に落下した。落下点の座標を $(L,\ 0)$〔m〕とする。L を求めよ。

解答 (1) $\left(V_0t,\ h-\dfrac{1}{2}gt^2\right)$〔m〕　(2) $V_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$〔m〕

(3) $t_3=\dfrac{h}{V_0}$〔s〕，$d=h$〔m〕，$y_3=\dfrac{(2V_0{}^2-gh)h}{2V_0{}^2}$〔m〕

(4) 物体 x 成分：V_0〔m/s〕，y 成分：$-\dfrac{gh}{V_0}$〔m/s〕

弾丸 x 成分：0 m/s，y 成分：$\dfrac{V_0{}^2-gh}{V_0}$〔m/s〕

(5) $m=\dfrac{Mgh}{V_0{}^2-gh}$〔kg〕，$u_0=\dfrac{V_0{}^2-gh}{V_0}$〔m/s〕

(6) $\dfrac{V_0{}^2-gh}{V_0{}^2}\sqrt{\dfrac{(2V_0{}^2-gh)h}{g}}+h$〔m〕

解説

(1) 水平方向は，等速直線運動なので，「$x=vt$」より　$x_1=V_0t$〔m〕

鉛直方向は，加速度の大きさ g の等加速度運動なので，「$y=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」，$t=0$ で $y=h$〔m〕であることに注意して

$$y_1=h-\frac{1}{2}gt^2\text{〔m〕}$$

よって　$(x_1,\ y_1)=\left(V_0t,\ h-\dfrac{1}{2}gt^2\right)$〔m〕

(2) 弾丸は，初速度 V_0〔m/s〕の鉛直投げ上げなので

$$y_2=V_0t-\frac{1}{2}gt^2\text{〔m〕}$$

(3) 時刻 t_3〔s〕の瞬間，物体，弾丸ともに $(d,\ y_3)$ にある。物体の y 座標は (1) の結果より

$$y_3=h-\frac{1}{2}gt_3{}^2\text{〔m〕}\quad\cdots\cdots①$$

弾丸の y 座標は，(2) の結果より

$$y_3=V_0t_3-\frac{1}{2}gt_3{}^2\text{〔m〕}\quad\cdots\cdots②$$

また，x 座標は (1) の結果より

$$d=V_0t_3\text{〔m〕}\quad\cdots\cdots③$$

よって　$t_3=\dfrac{d}{V_0}$〔s〕　……④

①，② 式より　$h-\dfrac{1}{2}gt_3{}^2=V_0t_3-\dfrac{1}{2}gt_3{}^2$

よって　$h=V_0t_3$

これは，右辺が ③ 式と等しいので　$d=h$〔m〕

④ 式より　$t_3=\dfrac{h}{V_0}$〔s〕

① 式に t_3 の結果を代入して

$$y_3=h-\frac{1}{2}g\left(\frac{h}{V_0}\right)^2=\frac{2hV_0{}^2-gh^2}{2V_0{}^2}=\frac{(2V_0{}^2-gh)h}{2V_0{}^2}\text{〔m〕}$$

(4)　(3) で求めた t_3〔s〕での速度の x，y 成分をそれぞれ求めればよい。物体について

x 成分：$\boldsymbol{V_0}$〔**m/s**〕

y 成分は，「$v=v_0+at$」より　$-gt_3=-g\cdot\dfrac{h}{V_0}=\boldsymbol{-\dfrac{gh}{V_0}}$〔**m/s**〕

弾丸について，x 成分は **0 m/s**

y 成分は　$V_0-gt_3=V_0-g\cdot\dfrac{h}{V_0}=\boldsymbol{\dfrac{V_0{}^2-gh}{V_0}}$〔**m/s**〕

(5)　衝突直後，一体となって水平方向に運動するので，y 成分は 0 になる。x，y 成分について，運動量保存則を用いると

$$MV_0=(M+m)u_0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$-M\cdot\frac{gh}{V_0}+m\cdot\frac{V_0{}^2-gh}{V_0}=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥式より　$m(V_0{}^2-gh)=Mgh$　　よって　$m=\boldsymbol{\dfrac{Mgh}{V_0{}^2-gh}}$〔**kg**〕

⑤式より　$u_0=\dfrac{M}{M+m}V_0=\dfrac{M}{M+\dfrac{Mgh}{V_0{}^2-gh}}V_0=\boldsymbol{\dfrac{V_0{}^2-gh}{V_0}}$〔**m/s**〕

(6)　y_3〔m〕の高さからの落下時間を T〔s〕とする。y 成分の運動は，ここから自由落下となるから

$$y_3=\frac{1}{2}gT^2 \text{〔m〕}$$

(3) の結果より　$\dfrac{(2V_0{}^2-gh)h}{2V_0{}^2}=\dfrac{1}{2}gT^2$

よって　$T=\sqrt{\dfrac{(2V_0{}^2-gh)h}{gV_0{}^2}}$〔s〕

この間に水平方向に $L-d=L-h$〔m〕だけ進むので

$$L-h=u_0T=\frac{V_0{}^2-gh}{V_0}\sqrt{\frac{(2V_0{}^2-gh)h}{gV_0{}^2}}=\frac{V_0{}^2-gh}{V_0{}^2}\sqrt{\frac{(2V_0{}^2-gh)h}{g}} \text{〔m〕}$$

$$L=\boldsymbol{\frac{V_0{}^2-gh}{V_0{}^2}\sqrt{\frac{(2V_0{}^2-gh)h}{g}}+h} \text{〔m〕}$$