1．

図1のように，レールの上を水平に移動できる質量Mの台車に質量mの小球が長さLの軽い糸でつるされており，鉛直下向きに重力がはたらいている。重力加速度の大きさをgとする。糸は伸び縮みせず，また，台車とレールの摩擦は無視できるものとする。台車の重心は支点Sにあるものとする。初めに，台車と小球は静止しており，糸は図1のように大きさの無視できる固定されたくぎによりレールを含む鉛直面内で曲げられている。このとき糸は台車の支点Sからくぎまでは鉛直で，くぎから小球までは鉛直に対して角度δとなっている。支点Sからくぎまでの距離を$\frac{1}{2}L$とする。

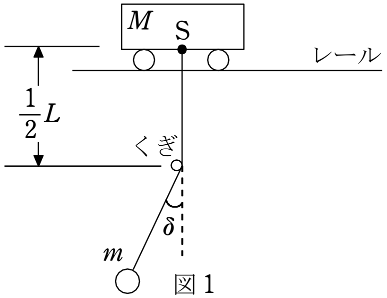


図1

$\boxed{ア}$〜$\boxed{イ}$はM，m，L，g，δの中から，$\boxed{ウ}$〜$\boxed{キ}$ $\boxed{コ}$はM，m，L，g，vの中から，$\boxed{ク}$ $\boxed{ケ}$はM，m，L，g，v，θの中から必要なものを用いて解答せよ。ただし，vは$\boxed{ア}$で求めた小球の速さを表すものとする。

(1) 小球を静かにはなすと，小球は右側に動き始め，小球が最下点に達したのち，台車も動きだした。小球が最下点に達した直後の小球の速さは$\boxed{ア}$，糸の張力の大きさは$\boxed{イ}$である。

(2) その後，図2のように小球は最下点からさらに右側に振れ，鉛直からの振れ角θが最大となった。このときの台車の速さは$\boxed{ウ}$，振れ角の余弦$\cos\theta$は$\boxed{エ}$である。

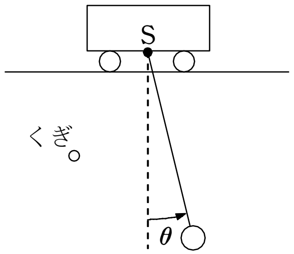


図2

(3) その後，小球の振れ角は減少し，再び小球が最下点に達した。このときの台車の速さは$\boxed{オ}$，小球の速さは$\boxed{カ}$である。

(4) その後，糸は再びくぎに触れることなく，台車と小球は運動を続けた。このときの台車と小球からなる物体系の重心の水平方向の速さは$\boxed{キ}$で一定となる。

(5) その後の運動は，小球の鉛直からの振れ角θが十分小さいとき，台車と小球からなる物体系の重心からみると，台車と小球が単振動するとみなせる。台車の質量と小球の質量が等しい場合，重心からみた支点Sの水平方向の位置は$\boxed{ク}$，重心からみた小球の水平方向の位置は$\boxed{ケ}$である。ただし，それぞれの水平方向の位置は右向きを正とする。また，θは反時計回りを正とし，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$と近似できるものとする。この振動の周期は$\boxed{コ}$と表される。

解答 (1) (ア) $\sqrt{gL(1-\cos\delta)}$ (イ) $mg(2-\cos\delta)$

(2) (ウ) $\dfrac{m}{M+m}v$ (エ) $1-\dfrac{Mv^2}{2(M+m)gL}$

(3) (オ) $\dfrac{2m}{M+m}v$ (カ) $\dfrac{|m-M|}{M+m}v$

(4) (キ) $\dfrac{m}{M+m}v$

(5) (ク) $-\dfrac{1}{2}L\theta$ (ケ) $\dfrac{1}{2}L\theta$ (コ) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{2g}}\left(=\pi\sqrt{\dfrac{2L}{g}}\right)$

解説

(1)(ア) この間，小球の力学的エネルギーは保存しているから，最下点での小球の速さをvとすると

$$mg\cdot\frac{1}{2}L(1-\cos\delta)=\frac{1}{2}mv^2$$

よって $v=\sqrt{gL(1-\cos\delta)}$

(イ) 最下点に達した直後，小球は支点Sを中心とする半径Lの円運動となる。このときの張力の大きさをSとして，運動方程式を立てると

$$m\frac{v^2}{L}=S-mg$$

(ア)の結果より $mg(1-\cos\delta)=S-mg$

よって $S=mg(2-\cos\delta)$

(2)(ウ) 小球が最下点に達した直後から台車と小球の水平方向の運動量は保存する。また，小球が最大の振れ角となったとき，台車と小球の速度は等しくなる。以上のことから求める速さをVとすると，次式が成りたつ。

$$mv+M\times 0=mV+MV$$

よって $mv=(m+M)V$

ゆえに $V=\dfrac{m}{M+m}v$

(エ) さらにこの間，台車と小球の力学的エネルギーも保存するので

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}MV^2+mgL(1-\cos\theta)$$

Vを代入して

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v\right)^2+mgL(1-\cos\theta)$$

整理して

$$\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v^2=mgL(1-\cos\theta)$$

$$\frac{Mv^2}{2(M+m)gL}=1-\cos\theta$$

よって　$\cos\theta=\boldsymbol{1-\dfrac{Mv^2}{2(M+m)gL}}$

(3)(オ)　図の右向きを正の向きとして，再び最下点に達したときの小球の速度を v'，台車の速度を V' とする。このとき，台車と小球の運動量の水平成分と，力学的エネルギーは，それぞれ保存するから

$$mv=mv'+MV' \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{1}{2}MV'^2 \quad \cdots\cdots ②$$

① 式より　$m(v-v')=MV'$　…… ①′

② 式を変形すると

$$m(v-v')(v+v')=MV'^2$$

①′ 式を代入して　$MV'(v+v')=MV'^2$

よって　$v+v'=V'$　…… ③

①，③ 式より，v' を消去して

$$mv=m(V'-v)+MV'$$

ゆえに　$|V'|=\boldsymbol{\dfrac{2m}{M+m}v}$

(カ)　(オ) の結果を ③ 式に代入して

$$|v'|=\left|\frac{2m}{M+m}v-v\right|$$

$$=\boldsymbol{\frac{|m-M|}{M+m}v}$$

参考　③ 式を変形すると

$$1=-\frac{v'-V'}{v-0}$$

となることから，最下点に達してから，再び最下点にもどってくるまでを，台車と小球の弾性衝突とみなすことができる。このことを用いるとより手早く求めることができる。

(4)(キ)　物体系の重心の水平方向の速度 v_G は

$$v_G=\frac{(\text{物体系の水平方向の運動量の和})}{(\text{物体系の全質量})}$$

で表される。台車と小球の水平方向の運動量は mv で保存しているので，求める速さは

$$|v_G|=\frac{mv}{M+m}=\boldsymbol{\frac{m}{M+m}v}$$

(5)　台車と小球の質量が等しいとき，この物体系の重心は台車の重心 (点 S) と小球の重心の中点，すなわち，糸の中点にある (図 a)。

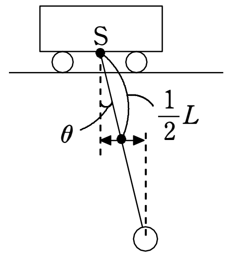


図 a

(ク)　よって，糸の中点から見た支点 S の水平方向の位置は

$$-\frac{1}{2}L\sin\theta \fallingdotseq \boldsymbol{-\frac{1}{2}L\theta}$$

(ケ)　同様に，糸の中点から見た小球の水平方向の位置は

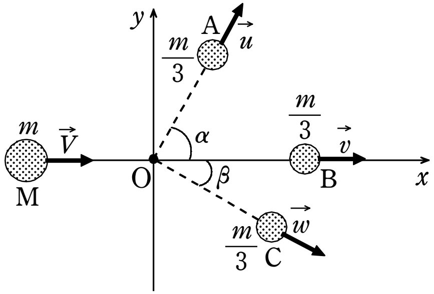
$$\frac{1}{2}L\sin\theta \fallingdotseq \boldsymbol{\frac{1}{2}L\theta}$$

(コ)　(キ) より，物体系の重心 (ここでは糸の中心) は等速度運動をしているため，物体系の重心から小球を観測しても，慣性力を考える必要はない。そこで，糸の中心からは，小球は $\frac{1}{2}L$ の糸の長さでの単振り子と同じ運動をしているように見える。θ が十分小さいとき，単振り子の周期は「$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$」と表されるので，求める周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}L}{g}}=\boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}}\left(=\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}\right)$$

２．

図のように，x 軸の正の向きに速度 $\vec{V}$ で進んできた質量 m の物体 M が，内部にある少量の火薬の爆発によって，点 O で質量 $\frac{m}{3}$ の 3 つの物体 A，B，C に分裂した。その後，物体 A，B，C は x-y 平面内を進んだ。物体 B は初めの進行方向と同じ向きに進み，物体 A，C は図のように x 軸の正の向きとなす角度 α，β の向きにそれぞれ進んだ。分裂直後の物体 A，B，C の速度はそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ であった。物体 M，A，B，C の速さをそれぞれ V，u，v，w とし，次の問いに答えよ。



(1)　物体 M の速度 $\vec{V}$ を物体 A，B，C の速度 $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。

(2)　速さ u を w，α，β を用いて表せ。

(3)　角度 α が 60°，β が 30° の場合について，速さ u と w の比 $\frac{u}{w}$ を求めよ。

(4)　角度 α と β が等しくなる場合について，速さ v を，V，u，α を用いて表せ。

分裂前の物体 M のもつ運動エネルギーは E であった。x-y 平面内を運動する物体 A，B，C の全運動エネルギーには，火薬の爆発によって新たに $2E$ の運動エネルギーが加わったとする。$\alpha=\beta$ となる場合を考え，次の問いに答えよ。

(5)　物体 M のもっていた運動エネルギー E を，m，u，v を用いて表せ。

ここで，$\alpha=\beta=60°$ となる場合を考える。

(6)　速さ u，v，w を，それぞれ，V を用いて表せ。

(7)　物体 A，B，C の運動エネルギー E_{A}，E_{B}，E_{C} を，E を用いて表せ。

解答　(1) $\dfrac{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}}{3}$　(2) $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}w$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(4) $3V-2u\cos\alpha$

(5) $\dfrac{m(2u^2+v^2)}{18}$　(6) u : $2V$，v : V，w : $2V$

(7) E_{A} : $\dfrac{4}{3}E$，E_{B} : $\dfrac{1}{3}E$，E_{C} : $\dfrac{4}{3}E$

解説

(1)　分裂前後に物体系に外力がはたらかないので，運動量保存則の式を立てると

$$m\vec{V}=\frac{m}{3}\vec{u}+\frac{m}{3}\vec{v}+\frac{m}{3}\vec{w}$$

よって　$\vec{V}=\dfrac{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}}{3}$

(2)　分裂前後の y 方向の運動量保存則の式を立てると (図 a)

$$0=\frac{m}{3}u_y+0+\frac{m}{3}w_y$$

$$u\sin\alpha+(-w\sin\beta)=0$$

よって　$u=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}w$

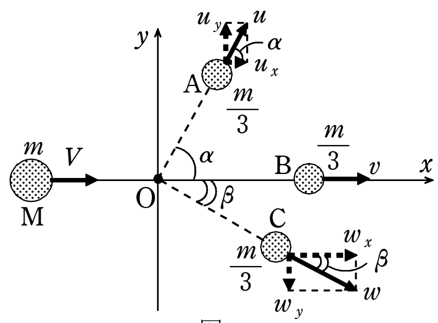


図 a

(3)　$\alpha=60°$，$\beta=30°$ のとき，(2) の結果より

$$\frac{u}{w}=\frac{\sin 30°}{\sin 60°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(4)　$\alpha=\beta$ のとき，(2) の結果より

$$u=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}w=w$$

以上を用いて，分裂前後の x 方向の運動量保存則の式を立てると

$$mV=\frac{m}{3}u_x+\frac{m}{3}v+\frac{m}{3}w_x$$

よって　$3V=u_x+v+w_x$

$$=u\cos\alpha+v+w\cos\beta$$

$$=u\cos\alpha+v+u\cos\alpha$$

ゆえに　$v=3V-2u\cos\alpha$

(5)　$\alpha=\beta$ のとき ($w=u$ のとき)，分裂前後のエネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}mV^2+2E=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)u^2\times 2+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v^2$$

$E=\dfrac{1}{2}mV^2$ より

$$3E=\frac{1}{3}mu^2+\frac{1}{6}mv^2=\frac{m(2u^2+v^2)}{6}$$

よって　$E=\dfrac{m(2u^2+v^2)}{18}$

(6)　$\alpha=\beta=60°$ のとき，(4) の結果より

$$v=3V-2u\cos 60°=3V-u \quad \cdots\cdots ①$$

(5) の結果に代入すると

$$E=\frac{1}{2}mV^2=\frac{m\{2u^2+(3V-u)^2\}}{18}$$

式を整理すると

$$9V^2=2u^2+(3V-u)^2$$

$$0=3u^2-6Vu=3u(u-2V)$$

$u>0$ より　$\boldsymbol{u=2V}$

$u=w$ より　$\boldsymbol{w=2V}$

① 式より　$v=3V-u=3V-2V=\boldsymbol{V}$

(7)　(6) の結果より

$$E_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)u^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)(2V)^2=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}mV^2\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}E}$$

$$E_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)v^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)V^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}mV^2\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}E}$$

$$E_{\mathrm{C}}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)w^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)(2V)^2=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}mV^2\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}E}$$