1．

図1のように，断面が三角形で質量が m_A の物体Aが水平面上に置かれ，物体Aの上に質量 m_B の小球Bが置かれている。この状態で，物体Aに水平方向の外力を加えたときの運動について考える。すべての物体は紙面と平行な方向にのみ運動し，物体Aは常にその底面が水平面から離れることなく運動する。また，物体Aの斜面に垂直に固定された平板により，小球Bが点Oより下方に動くことはない。なお，点Oは物体Aの斜面上にあり，そこから斜面にそって頂点Pへ向かう向きを x 軸，斜面と直交して上向きを y 軸とする。小球Bの大きさ，すべての表面間の摩擦，空気抵抗，平板の質量は無視できるものとし，重力加速度の大きさを g，物体Aの傾斜角を θ $(0° < \theta < 90°)$ として，次の(1)～(3)に答えよ。

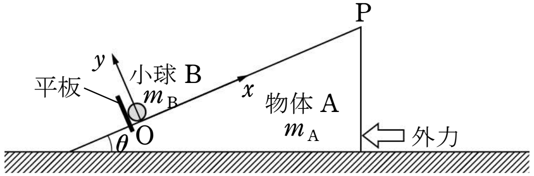


図1

(1) 最初は重力以外の外力がなく，小球Bが点Oの位置に静止した状態にあるものとし，ある時点から図1のように外力が加わった場合を考える。

(a) 外力が加わったことにより，物体Aが加速度 a_A で運動を始めた。このとき物体Aに固定された観測点から見ると，小球Bには，物体Aの加速度とは逆の向きに，大きさ $|m_B a_A|$ の慣性力がはたらいていると考えることができる。このとき小球Bに作用する重力と慣性力の合力 $\vec{F}$ を，x 成分 F_x と y 成分 F_y に分けて，それぞれ m_A，m_B，g，θ，a_A のうちから必要なものを用いて表せ。なお，a_A は水平面上に固定された観測点から見たときの加速度であり，図1の左向きへ加速する場合を正とする。

(b) (1)(a)で，小球Bが x 軸方向へ動きだすために，a_A が満たすべき条件は何か，m_A，m_B，g，θ のうちから必要なものを用いて表せ。

(2) 図2のように物体Aにばね定数 k のばねを取りつけ，ばねのもう一端を水平面に固定された壁につなげた場合を考える。ただし，ばねの質量は無視できるものとする。なお，点Oから点Pまでの距離は十分に長く，小球Bが物体Aの斜面の頂点Pに達することはないものとする。また，小球Bの質量は物体Aの質量に比べて十分に小さく，物体Aの運動を考えるうえで小球Bの影響は無視できるものとする。

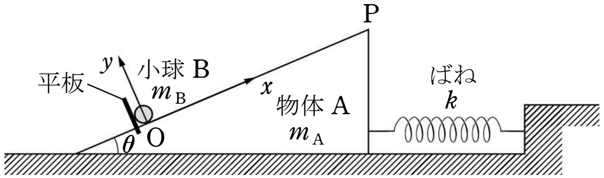


図2

(a) ばねが自然の長さより L だけ短くなるように水平に物体Aを動かし，静かに手をはなす。このとき，点Oにある小球Bが x 軸方向へ動きだすための L が満たすべき条件は何か，m_A，m_B，g，k，θ のうちから必要なものを用いて表せ。

(b) 物体Aと小球Bについて，(2)(a)で動きだした後の運動を考える。小球Bが常に物体Aの斜面から離れず，斜面と接し続けるために L が満たすべき条件は何か，m_A，m_B，g，k，θ のうちから必要なものを用いて表せ。

(c) (2)の(a)(b)をともに満たす L の範囲は，物体Aの傾斜角 θ によって変化する。そして，ある傾斜角 θ_{max} 以上では，(a)と(b)がともに成立するような L は存在しない。θ_{max} の値を求めるとともに，(2)の(a)(b)をともに満たす L の範囲と θ の関係を図示せよ。なお，図示の際には，L を縦軸とし，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の中から適切なものを1つ選択して横軸とすること。さらに，(2)の(a)(b)をともに満たす L の範囲を斜線で塗りつぶすこと。ただし，この図において境界線が範囲に含まれるか否かは明らかにしなくてよい。

(3) 図3のように，小球Bを質量 m_C の小球Cに取りかえる。小球Bと小球Cの違いは質量のみである。ここで，物体Aの運動にとって小球Cの影響は無視できないものとし，また，$\theta = 30°$ とする。それ以外の条件は(2)と同じとする。

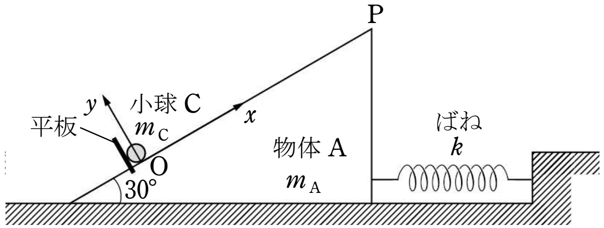


図3

(a) ばねが自然の長さより L だけ短くなるように水平に物体Aを動かし，静かに手をはなすと，小球Cが点Oから x 軸方向へ動きだし，斜面から離れることなく点Oにもどってきた。小球Cは点Oにもどるときに平板と衝突し，衝突直前の平板に対する小球Cの相対速度は $\vec{v_C}$ $(|\vec{v_C}| = v_C)$ であった。一方，その衝突直前の物体Aと平板の速度は v_A，衝突直後の物体Aと平板の速度は $v_A{}'$ であった。なお，v_A と $v_A{}'$ は，ともに水平面上に固定された観測点から見た速度であり，図3の左向きへ進む場合を正とする。

衝突直後の物体Aの速度 $v_A{}'$ を，v_A，v_C，m_A，m_C，g，k，L のうちから必要なものを用いて表せ。なお，小球Cと平板の間の反発係数は0であり，この衝突は瞬間的に起こるものとする。

(b) (3)(a)の衝突は，物体Aが動きだしてから，ばねが最も伸びる時点までの間に生じていた。そして，衝突後にばねが最も伸びたとき，ばねは自然の長さより L' だけ長

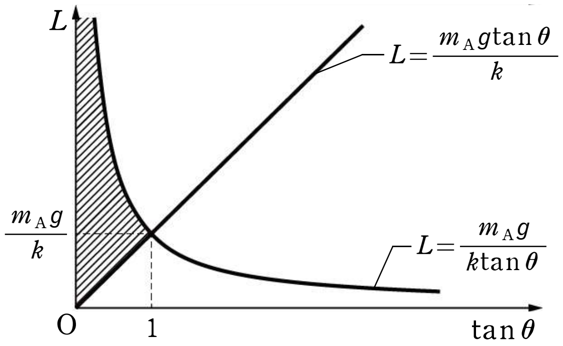
かった。L' を，v_A，v_C，m_A，m_C，g，k，L のうちから必要なものを用いて表せ。

解答　(1)　(a)　F_x：$-m_Bg\sin\theta+m_Ba_A\cos\theta$，$F_y$：$-m_Bg\cos\theta-m_Ba_A\sin\theta$

(b)　$a_A>g\tan\theta$

(2)　(a)　$L>\dfrac{m_Ag}{k}\tan\theta$　　(b)　$L\leqq\dfrac{m_Ag}{k\tan\theta}$

(c)　45°，〔右図〕



(3)　(a)　$v_A+\dfrac{\sqrt{3}\,m_Cv_C}{2(m_A+m_C)}$　　(b)　$\sqrt{L^2-\dfrac{(4m_A+m_C)m_Cv_C{}^2}{4k(m_A+m_C)}}$

解説

(1)(a)　重力，慣性力を x 成分 y 成分に分解して，成分ごとに和をとると

$$F_x=-m_Bg\sin\theta+m_Ba_A\cos\theta$$

$$F_y=-m_Bg\cos\theta-m_Ba_A\sin\theta$$

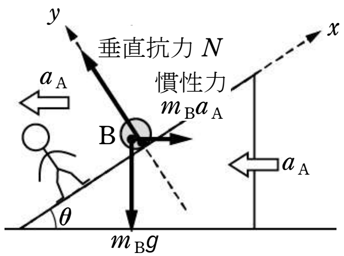


図 a

(b)　$F_x>0$ であれば，小球 B は x 軸の正の向きへ動きだす。

$$F_x=-m_Bg\sin\theta+m_Ba_A\cos\theta>0$$

よって　$a_A>\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}g=g\tan\theta$

(2)(a)　物体 A をはなした直後（ばねの縮み L）の物体 A の加速度を a_{A0} とする。物体 A について，水平方向の運動方程式を立てると

$$m_Aa_{A0}=kL\quad より\quad a_{A0}=\frac{kL}{m_A}$$

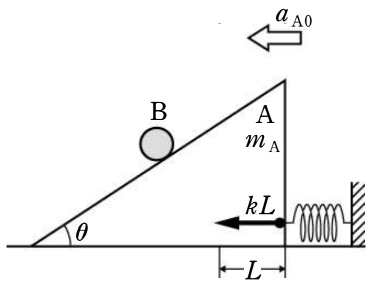


図 b

(1)(b) より，$a_{A0}>g\tan\theta$ であれば小球 B は x 軸の正の向きに動きだす。これより

$$a_{A0}=\frac{kL}{m_A}>g\tan\theta$$

よって　$L>\dfrac{m_Ag}{k}\tan\theta$

(b)　物体 A の加速度が a_A のとき，物体 A が小球 B に与える垂直抗力の大きさを N とする。

小球 B について，y 方向の力のつりあいより

$$N=m_Bg\cos\theta+m_Ba_A\sin\theta$$

a_A は，ばねが L だけ伸びたとき（物体 A の運動の左端）に最小になる。その値を $a_{A\min}$ とする。このときの物体 A について，水平方向の運動方程式を立てると

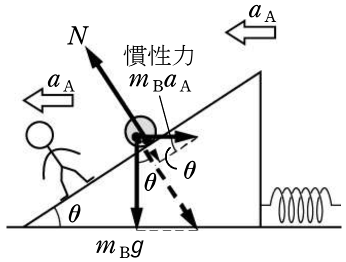


図 c

$$m_Aa_{A\min}=-kL$$

これより　$a_{A\min}=-\dfrac{kL}{m_A}$

小球 B が常に物体 A の斜面から離れないためには，$a_A=a_{A\min}$ のときに $N\geqq0$ であればよい。

$$N=m_Bg\cos\theta+m_Ba_{A\min}\sin\theta\geqq0$$

$$m_Bg\cos\theta+m_B\left(-\frac{kL}{m_A}\right)\sin\theta\geqq0$$

よって　$L\leqq\dfrac{m_Ag\cos\theta}{k\sin\theta}=\dfrac{m_Ag}{k\tan\theta}$

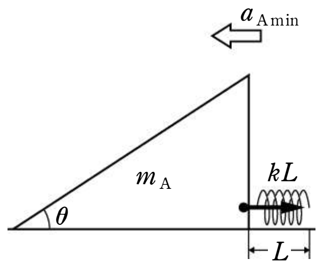


図 d

(c)　(a)，(b) をともに満たすような L の範囲は

$$\frac{m_Ag\tan\theta}{k}<L\leqq\frac{m_Ag}{k\tan\theta}$$

これを満たす L が存在するとき

$$\frac{m_Ag\tan\theta}{k}\leqq\frac{m_Ag}{k\tan\theta}$$

よって　$\tan^2\theta \leqq 1$　であるので，これを満たす θ の最大値 $\theta_{\max}$ は　$\theta_{\max}=45°$

上式を満たす L の範囲は，図 e のようになる。

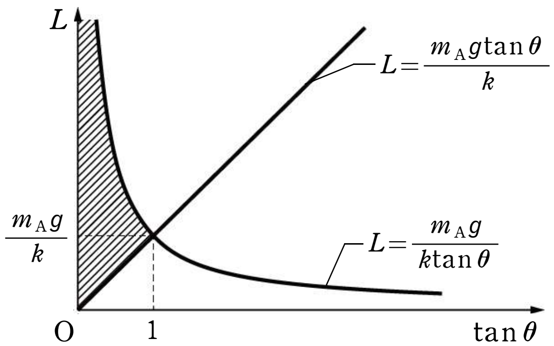


図 e

(3)(a)　衝突直前の小球 C の水平面に対する水平方向の速度を v_{C0} とすると，衝突直前の平板に対する小球 C の速度の水平成分が $v_C\cos 30°$ であることから，相対速度の式「$v_{BA}=v_A-v_B$」より

$$v_C\cos 30°=v_{C0}-v_A$$

よって

$$v_{C0}=v_A+\frac{\sqrt{3}}{2}v_C$$

小球 C と平板は反発係数 0 の衝突をするので，衝突後の速度は等しくなる。

小球 C と平板 (物体 A) の衝突前後について，水平方向の運動量保存の式を立てると

$$m_A v_A+m_C v_{C0}=(m_A+m_C)v_A'$$

以上より

$$v_A'=v_A+\frac{\sqrt{3}\,m_C v_C}{2(m_A+m_C)}$$

(b)　小球 C が平板と衝突したときのばねの伸びを l とする。衝突前のばねから手をはなした直後と衝突直前について，力学的エネルギー保存の式を立てると

$$0+\frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}m_A v_A{}^2+\frac{1}{2}m_C\{v_{C0}{}^2+(v_C\sin 30°)^2\}+\frac{1}{2}kl^2 \quad \cdots\cdots ①$$

衝突直後と衝突後のばねが最も伸びたときについて，力学的エネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}(m_A+m_C)v_A'^2+\frac{1}{2}kl^2=0+\frac{1}{2}kL'^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② 式より l を消去し，v_A' に (3)(a) の結果を代入すると

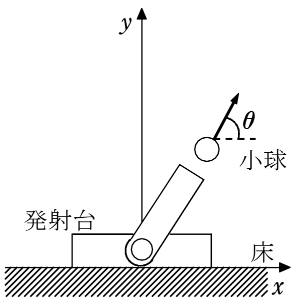
$$kL^2+(m_A+m_C)\left\{v_A+\frac{\sqrt{3}\,m_C v_C}{2(m_A+m_C)}\right\}^2$$

$$=m_A v_A{}^2+\left\{\left(v_A+\frac{\sqrt{3}}{2}v_C\right)^2+\frac{1}{4}v_C{}^2\right\}m_C+kL'^2$$

$$kL'^2=kL^2+\frac{3m_C{}^2v_C{}^2}{4(m_A+m_C)}-m_C v_C{}^2$$

$$L'=\sqrt{L^2-\frac{(4m_A+m_C)m_C v_C{}^2}{4k(m_A+m_C)}}$$

2．



図のように，水平な床に置かれた発射台を考える。この発射台は，一定のエネルギー E_0 を瞬時に小球と発射台の運動エネルギーに変換することで小球を発射できる。この小球は大きさが無視でき，質量 m をもつ。小球を含まない発射台の質量を M とする。床と発射台の間には摩擦がなく，発射台は床の上の直線上を自由に動くことができる。この直線を x 軸とし，x 軸に垂直で鉛直上向きを y 軸とする。この小球の発射方向は x-y 面内で動かすことができる。小球は床の高さから発射されるとしてよい。重力加速度は鉛直下向きでその大きさを g とする。また，空気抵抗，小球発射前後での E_0 にかかわる質量変化はないものとする。

以下，$x=0$ の位置で静止している発射台から小球を発射する場合を考える。発射直後の小球の床に対する速度は，図のように x 軸と角 $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす向きであった。

(1)　小球発射直後の小球と発射台の床に対する速さをそれぞれ v_1，V_1 とするとき，小球発射前後でのエネルギー保存，水平方向の運動量保存を表す式を示せ。

(2)　発射直後の小球の床に対する速度の水平 (x) 成分 v_{1x}，垂直 (y) 成分 v_{1y} を m，M，E_0，θ を用いて表せ。

(3)　発射直後の小球の発射台に対する相対速度の大きさを m，M，E_0，θ を用いて表せ。

(4)　発射された小球が床に最初に落ちる位置 x_F を g，m，M，E_0，θ を用いて表せ。

(5)　x_F が最大となるときの角度 θ は $\dfrac{\pi}{4}$ より大きいか小さいかを理由とともに示せ。

解答　(1)　エネルギー保存：$E_0=\dfrac{1}{2}mv_1{}^2+\dfrac{1}{2}MV_1{}^2$，運動量保存：$0=mv_1\cos\theta-MV_1$

(2)　v_{1x}：$\sqrt{\dfrac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}}\cdot\cos\theta$　　v_{1y}：$\sqrt{\dfrac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}}\cdot\sin\theta$

(3)　$\sqrt{\dfrac{2E_0\{M^2+m(2M+m)\cos^2\theta\}}{Mm(M+m\cos^2\theta)}}$

(4)　$\dfrac{2ME_0\sin 2\theta}{mg(M+m\cos^2\theta)}$

(5)　(4) の結果より　$x_F=\dfrac{4ME_0\sin\theta\cos\theta}{m^2g\left(\dfrac{M}{m}+\cos^2\theta\right)}$

よって　$x_F{}^2=\left(\dfrac{4ME_0}{m^2g}\right)^2\cdot\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\dfrac{M}{m}+\cos^2\theta\right)^2}=\left(\dfrac{4ME_0}{m^2g}\right)^2\cdot\dfrac{(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta}{\left(\dfrac{M}{m}+\cos^2\theta\right)^2}$

よって，$k=\cos^2\theta$ とおくと　$z=\dfrac{k-k^2}{\left(k+\dfrac{M}{m}\right)^2}$　　…… ③

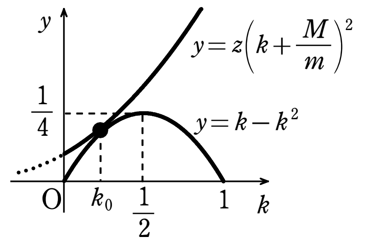
が最大であれば $x_F{}^2$ が最大となる。$x_F>0$ であるから，このとき x_F も最大となる。

③ 式より　$\left(k+\dfrac{M}{m}\right)^2z=k-k^2$　…… ④

④ 式を満たす z の最大値を求めるために　$y=z\left(k+\dfrac{M}{m}\right)^2$　　…… (α)

と　$y=k-k^2$　　…… (β)

のグラフをかくと，右図のようになる。



④ 式を満たすためには，z を変化させて，この 2 つの放物線が交わるようにすればよい。そのうち，z が最大となるのは，放物線 (α) と放物線 (β) が接するときである。そのときの k が右図の k_0 である。

$k=k_0$ のときの θ を θ_0 とすると，$k_0<\dfrac{1}{2}$ より

$\cos^2\theta_0<\dfrac{1}{2}$

よって，$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta_0<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　ゆえに　$\theta_0>\dfrac{\pi}{4}$

すなわち，x_F が最大となるときの角度 θ は $\dfrac{\pi}{4}$ より大きい。

解説

(1) では，小球と発射台は水平方向にたがいに及ぼしあう力 (内力) だけで運動するから，水平方向の運動量の和は保存される。(5) は，小球の飛距離が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で最大になるときの θ がどうなるかを考える。

(1)　題意より，エネルギー保存を表す式は

$$\boldsymbol{E_0 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}MV_1{}^2}\quad \cdots\cdots ①$$

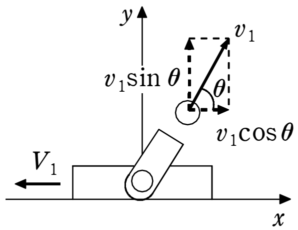


図 a

図 a より，水平方向の運動量保存を表す式は

$$0 = mv_1\cos\theta + M(-V_1)$$

よって　$\boldsymbol{0 = mv_1\cos\theta - MV_1}$　…… ②

(2)　② 式より　$V_1 = \dfrac{m}{M}v_1\cos\theta$

① 式に代入して　$E_0 = \dfrac{1}{2}mv_1{}^2 + \dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{m}{M}v_1\cos\theta\right)^2$

これより　$v_1{}^2 = \dfrac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}$

よって　$v_1 = \sqrt{\dfrac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}}$

図 a より

$$\boldsymbol{v_{1x} = v_1\cos\theta = \sqrt{\frac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}}\cdot\cos\theta}$$

$$\boldsymbol{v_{1y} = v_1\sin\theta = \sqrt{\frac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}}\cdot\sin\theta}$$

(3)　相対速度の水平成分は

$$v_{1x} - (-V_1) = v_{1x} + V_1 = v_1\cos\theta + \frac{m}{M}v_1\cos\theta = \frac{M+m}{M}v_1\cos\theta$$

発射台は水平方向にしか運動しないので，相対速度の鉛直成分は v_{1y} である。したがって，相対速度の大きさを V とすると

$$V^2 = \left(\frac{M+m}{M}v_1\cos\theta\right)^2 + (v_1\sin\theta)^2$$

$$= \frac{(M+m)^2\cos^2\theta + M^2\sin^2\theta}{M^2}v_1{}^2$$

$$= \frac{M^2+m(2M+m)\cos^2\theta}{M^2}\times\frac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{2E_0\{M^2+m(2M+m)\cos^2\theta\}}{Mm(M+m\cos^2\theta)}$$

よって　$\boldsymbol{V = \sqrt{\dfrac{2E_0\{M^2+m(2M+m)\cos^2\theta\}}{Mm(M+m\cos^2\theta)}}}$

(4)　小球が落下するまでの時間を t とすると，小球は鉛直方向に初速 v_{1y} の鉛直投射運動をするから，等加速度運動の式「$x = v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$」より

$$0 = v_{1y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$t \fallingdotseq 0$ だから　$t = \dfrac{2}{g}v_{1y}$

小球は水平方向に速さ v_{1x} で等速度運動をするから

$$x_F = v_{1x}t = \frac{2}{g}v_{1x}v_{1y} = \frac{2}{g}v_1{}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{4ME_0\sin\theta\cos\theta}{mg(M+m\cos^2\theta)} = \boldsymbol{\frac{2ME_0\sin 2\theta}{mg(M+m\cos^2\theta)}}$$

(5)　(4) の結果より　$x_F = \dfrac{4ME_0\sin\theta\cos\theta}{m^2g\left(\dfrac{M}{m}+\cos^2\theta\right)}$

よって　$x_F{}^2 = \left(\dfrac{4ME_0}{m^2g}\right)^2\cdot\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\dfrac{M}{m}+\cos^2\theta\right)^2} = \left(\dfrac{4ME_0}{m^2g}\right)^2\cdot\dfrac{(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta}{\left(\dfrac{M}{m}+\cos^2\theta\right)^2}$

よって，$k = \cos^2\theta$ とおくと　$z = \dfrac{k-k^2}{\left(k+\dfrac{M}{m}\right)^2}$　…… ③

が最大であれば $x_F{}^2$ が最大となる。$x_F > 0$ であるから，このとき x_F も最大となる。

③ 式より　$\left(k+\dfrac{M}{m}\right)^2 z = k - k^2$　…… ④

④ 式を満たす z の最大値を求めるために　$y = z\left(k+\dfrac{M}{m}\right)^2$　…… (α)

と　$y = k - k^2$　…… (β)

のグラフをかくと，図 b のようになる。④ 式を満たすためには，z を変化させて，この 2 つの放物線が交わるようにすればよい。そのうち，z が最大となるのは，放物線 (α) と放物線 (β) が接するときである。そのときの k が図 b の k_0 である。

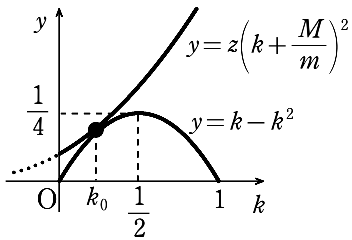


図 b

$k = k_0$ のときの θ を θ_0 とすると，$k_0 < \dfrac{1}{2}$ より

$$\cos^2\theta_0 < \frac{1}{2}$$

よって，$0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ より　$\cos\theta_0 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　ゆえに　$\theta_0 > \dfrac{\pi}{4}$

すなわち，x_F が最大となるときの角度 θ は $\dfrac{\pi}{4}$ より大きい。