

1.

図1のように、断面が三角形で質量が m_A の物体 A が水平面上に置かれ、物体 A の上に質量 m_B の小球 B が置かれている。この状態で、物体 A に水平方向の外力を加えたときの運動について考える。すべて

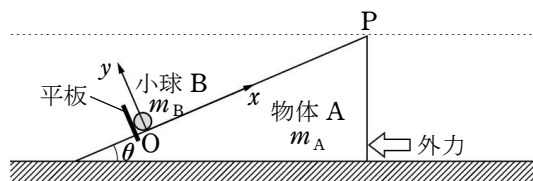


図1

の物体は紙面と平行な方向にのみ運動し、物体 A は常にその底面が水平面から離れることなく運動する。また、物体 A の斜面に垂直に固定された平板により、小球 B が点 O より下方に動くことはない。なお、点 O は物体 A の斜面上にあり、そこから斜面にそって頂点 P へ向かう向きを x 軸、斜面と直交して上向きを y 軸とする。小球 B の大きさ、すべての表面間の摩擦、空気抵抗、平板の質量は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g 、物体 A の傾斜角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) として、次の (1)~(3) に答えよ。

- (1) 最初は重力以外の外力がなく、小球 B が点 O の位置に静止した状態にあるものとし、ある時点から図1のように外力が加わった場合を考える。
- (a) 外力が加わったことにより、物体 A が加速度 a_A で運動を始めた。このとき物体 A に固定された観測点から見ると、小球 B には、物体 A の加速度とは逆の向きに、大きさ $|m_B a_A|$ の慣性力がはたらいていると考えることができる。このとき小球 B に作用する重力と慣性力の合力 \vec{F} を、 x 成分 F_x と y 成分 F_y に分けて、それぞれ m_A, m_B, g, θ, a_A のうちから必要なものを用いて表せ。なお、 a_A は水平面上に固定された観測点から見たときの加速度であり、図1の左向きへ加速する場合を正とする。

- (b) (1)(a) で、小球 B が x 軸方向へ動きだすために、 a_A が満たすべき条件は何か、 m_A, m_B, g, θ のうちから必要なものを用いて表せ。

- (2) 図2のように物体 A にばね定数 k のばねを取りつけ、ばねのもう一端を水平面に固定された壁につなげた場合を考える。ただし、ばねの質量は無

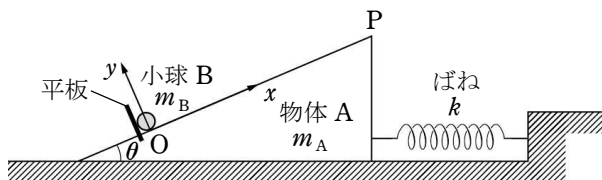


図2

視できるものとする。なお、点 O から点 P までの距離は十分に長く、小球 B が物体 A の斜面の頂点 P に達することはないものとする。また、小球 B の質量は物体 A の質量に比べて十分に小さく、物体 A の運動を考えるうえで小球 B の影響は無視できるものとする。

- (a) ばねが自然の長さより L だけ短くなるように水平に物体 A を動かし、静かに手をはなす。このとき、点 O にある小球 B が x 軸方向へ動きだすための L が満たすべき条件は何か、 m_A, m_B, g, k, θ のうちから必要なものを用いて表せ。

- (b) 物体 A と小球 B について、(2)(a) で動きだした後の運動を考える。小球 B が常に物体 A の斜面から離れず、斜面と接し続けるために L が満たすべき条件は何か、 m_A, m_B, g, k, θ のうちから必要なものを用いて表せ。

- (c) (2) の (a)(b) をともに満たす L の範囲は、物体 A の傾斜角 θ によって変化する。そして、ある傾斜角 θ_{\max} 以上では、(a) と (b) がともに成立するような L は存在しない。 θ_{\max} の値を求めるとともに、(2) の (a)(b) をともに満たす L の範囲と θ の関係を図示せよ。なお、図示の際には、 L を縦軸とし、 $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ の中から適切なものを1つ選択して横軸とすること。さらに、(2) の (a)(b) をともに満たす L の範囲を斜線で塗りつぶすこと。ただし、この図において境界線が範囲に含まれるか否かは明らかにしなくてよい。

- (3) 図3のように、小球 B を質量 m_C の小球 C に取りかえる。小球 B と小球 C の違いは質量のみである。ここで、物体 A の運動にとって小球 C の影響は無視できないものとし、

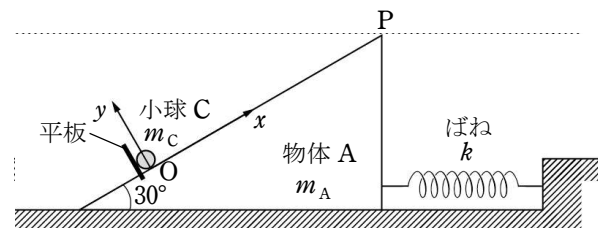


図3

また、 $\theta = 30^\circ$ とする。それ以外の条件は (2) と同じとする。

- (a) ばねが自然の長さより L だけ短くなるように水平に物体 A を動かし、静かに手をはなすと、小球 C が点 O から x 軸方向へ動きだし、斜面から離れることなく点 O にもどってきた。小球 C は点 O にもどるときに平板と衝突し、衝突直前の平板に対する小球 C の相対速度は \vec{v}_c ($|\vec{v}_c| = v_c$) であった。一方、その衝突直前の物体 A と平板の速度は v_A 、衝突直後の物体 A と平板の速度は v_A' であった。なお、 v_A と v_A' は、ともに水平面上に固定された観測点から見た速度であり、図3の左向きへ進む場合を正とする。

衝突直後の物体 A の速度 v_A' を、 $v_A, v_c, m_A, m_C, g, k, L$ のうちから必要なものを用いて表せ。なお、小球 C と平板の間の反発係数は 0 であり、この衝突は瞬間的に起こるものとする。

- (b) (3)(a) の衝突は、物体 A が動きだしてから、ばねが最も伸びる時点までの間に生じていた。そして、衝突後にばねが最も伸びたとき、ばねは自然の長さより L' だけ長

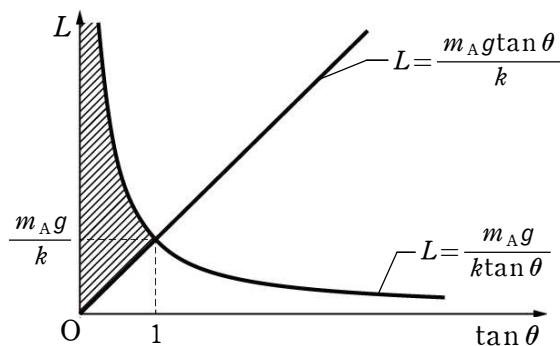
かった。 L' を, $v_A, v_C, m_A, m_C, g, k, L$ のうちから必要なものを用いて表せ。

【解答】 (1) (a) $F_x : -m_B g \sin \theta + m_B a_A \cos \theta, F_y : -m_B g \cos \theta - m_B a_A \sin \theta$

(b) $a_A > g \tan \theta$

(2) (a) $L > \frac{m_A g}{k} \tan \theta$ (b) $L \leq \frac{m_A g}{k \tan \theta}$

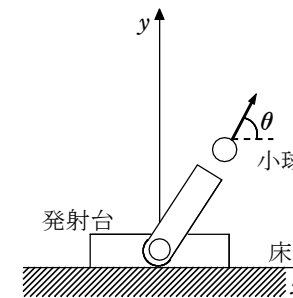
(c) 45° , [右図]



(3) (a) $v_A + \frac{\sqrt{3} m_C v_C}{2(m_A + m_C)}$ (b) $\sqrt{L^2 - \frac{(4m_A + m_C)m_C v_C^2}{4k(m_A + m_C)}}$

2.

図のように、水平な床に置かれた発射台を考える。この発射台は、一定のエネルギー E_0 を瞬時に小球と発射台の運動エネルギーに変換することで小球を発射できる。この小球は大きさが無視でき、質量 m をもつ。小球を含まない発射台の質量を M とする。床と発射台の間には摩擦がなく、発射台は床の上の直線上を自由に動くことができる。この直線を x 軸とし、 x 軸に垂直で鉛直上向きを y 軸とする。この小球の発射方向は x - y 面内で動かすことができる。小球は床の高さから発射されるとしてよい。重力加速度は鉛直下向きでその大きさを g とする。また、空気抵抗、小球発射前後での E_0 にかかわる質量変化はないものとする。



以下、 $x=0$ の位置で静止している発射台から小球を発射する場合を考える。発射直後の小球の床に対する速度は、図のように x 軸と角 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) をなす向きであった。

- (1) 小球発射直後の小球と発射台の床に対する速さをそれぞれ v_1, V_1 とするとき、小球発射前後でのエネルギー保存、水平方向の運動量保存を表す式を示せ。
- (2) 発射直後の小球の床に対する速度の水平 (x) 成分 v_{1x} 、垂直 (y) 成分 v_{1y} を m, M, E_0, θ を用いて表せ。
- (3) 発射直後の小球の発射台に対する相対速度の大きさを m, M, E_0, θ を用いて表せ。
- (4) 発射された小球が床に最初に落ちる位置 x_F を g, m, M, E_0, θ を用いて表せ。
- (5) x_F が最大となるときの角度 θ は $\frac{\pi}{4}$ より大きい小さいかを理由とともに示せ。

【解答】 (1) エネルギー保存: $E_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M V_1^2$, 運動量保存: $0 = m v_1 \cos \theta - M V_1$

(2) $v_{1x} : \sqrt{\frac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}} \cdot \cos \theta$ $v_{1y} : \sqrt{\frac{2ME_0}{m(M+m\cos^2\theta)}} \cdot \sin \theta$

(3) $\sqrt{\frac{2E_0\{M^2 + m(2M+m)\cos^2\theta\}}{Mm(M+m\cos^2\theta)}}$

(4) $\frac{2ME_0 \sin 2\theta}{mg(M+m\cos^2\theta)}$

(5) (4)の結果より $x_F = \frac{4ME_0 \sin \theta \cos \theta}{m^2 g \left(\frac{M}{m} + \cos^2 \theta \right)}$

よって $x_F^2 = \left(\frac{4ME_0}{m^2 g} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(\frac{M}{m} + \cos^2 \theta \right)^2} = \left(\frac{4ME_0}{m^2 g} \right)^2 \cdot \frac{(1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta}{\left(\frac{M}{m} + \cos^2 \theta \right)^2}$

よって、 $k = \cos^2 \theta$ とおくと $z = \frac{k - k^2}{\left(k + \frac{M}{m} \right)^2}$ …… ③

が最大であれば x_F^2 が最大となる。 $x_F > 0$ であるから、このとき x_F も最大となる。

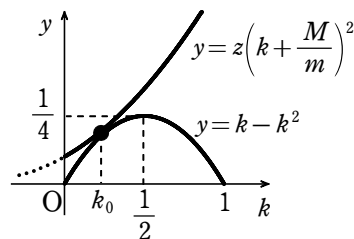
③式より $\left(k + \frac{M}{m} \right)^2 z = k - k^2$ …… ④

④式を満たす z の最大値を求めるために $y = z \left(k + \frac{M}{m} \right)^2$ …… (α)

と $y = k - k^2$ …… (β)

のグラフをかくと、右図のようになる。

④式を満たすためには、 z を変化させて、この2つの放物線が交わるようにすればよい。そのうち、 z が最大となるのは、放物線(α)と放物線(β)が接するときである。そのときの k が右図の k_0 である。



$k = k_0$ のときの θ を θ_0 とすると、 $k_0 < \frac{1}{2}$ より

$$\cos^2 \theta_0 < \frac{1}{2}$$

よって、 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ゆえに $\theta_0 > \frac{\pi}{4}$

すなわち、 x_F が最大となるときの角度 θ は $\frac{\pi}{4}$ より大きい。