1．

次の文の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ に入れるのに最も適当なものを各問いの文末の解答群から選び，その記号を記せ。ただし，同じものを2回以上用いてもよい。以下では，重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視できるものとする。

(1)　図1のように，水平面に対する傾き角 θ のなめらかな斜面の頂点に，軽くて抵抗なく回転する滑車を取りつけた。軽くて伸び縮みしない糸の端を質量 m の物体Aにつなぎ，その糸の他端を滑車に通して質量 M の物体Bにつなぎ静かにつり下げたところ，物体Aは斜面の最大傾斜方向にそって下向きに加速度 a で運動を始めた。物体Aにつながれた糸は斜面に平行を保っており，糸が物体を引く力の大きさを T とする。このとき物体Aの運動方程式は以下の式で表される。

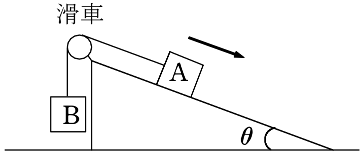


図1

$$ma = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}$$

物体Bに対しても運動方程式を立て，2つの運動方程式を連立させて加速度と糸を引く力を求めると，$a = \boxed{\text{ウ}} \times g$，$T = \boxed{\text{エ}} \times Mg$ となる。

［解答群］

① mg　② $mg\sin\theta$　③ $mg\cos\theta$　④ $mg\tan\theta$　⑤ $T\sin\theta$

⑥ $T\cos\theta$　⑦ T　⑧ $-T$　⑨ $\dfrac{m\sin\theta + M}{M+m}$　⑩ $\dfrac{m\sin\theta - M}{M+m}$

⑪ $\dfrac{m\cos\theta + M}{M+m}$　⑫ $\dfrac{m\cos\theta - M}{M+m}$　⑬ $\dfrac{1-\cos\theta}{M+m}m$

⑭ $\dfrac{1-\sin\theta}{M+m}m$　⑮ $\dfrac{1+\cos\theta}{M+m}m$　⑯ $\dfrac{1+\sin\theta}{M+m}m$

(2)　図2のように，水平面に対する傾き角 θ のなめらかな斜面をもつ三角台Cがある。この三角台の質量は M で，水平な床面上をなめらかに動くことができる。水平右向きを正として x 軸をとり，鉛直下向きを正として y 軸をとる。質量 m の物体Aを静かに三角台Cの上に置くと，物体Aと三角台Cは動き始めた。水平な床面上で静止した観察者Dから見ると，三角台Cは x 軸 $\boxed{\text{オ}}$ の向きに移動する。物体Aが三角台C上を斜面の最大傾斜方向にそって距離 L だけ移動したとき，観察者Dから見た物体Aの水平方向の速度を u とすると，同じ観察者Dから見た三角台Cの水平方向の速度 U は $\boxed{\text{カ}} \times u$ である。一方，この運動を三角台とともに動く観察者Eから見ると，物体Aの水平方向の速度 u_x は $\boxed{\text{キ}} \times u$ である。物体Aは斜面にそって動くので，観察者Eから見た物体Aの鉛直方向の速度 u_y は $\boxed{\text{ク}} \times u_x$ である。

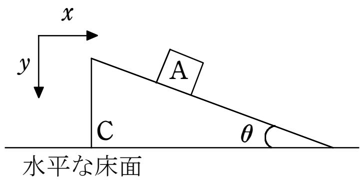


図2

最後に，力学的エネルギーの視点から式を整理する。観察者Dから見た2つの物体の運動エネルギーと位置エネルギーの関係は

$$mgL\sin\theta = \frac{1}{2}MU^2 + \boxed{\text{ケ}}$$

となる。ここで，傾き $\theta = 45°$, $M = 5m$ とすると，$u = \boxed{\text{コ}} \times \sqrt{gL}$ が求まる。

［解答群］

① 正　② 負　③ $\dfrac{m}{M}$　④ $-\dfrac{m}{M}$　⑤ $\dfrac{M}{m}$　⑥ $-\dfrac{M}{m}$

⑦ $\dfrac{M-m}{M}$　⑧ $\dfrac{M+m}{M}$　⑨ $\dfrac{M}{m+M}$　⑩ $\dfrac{m}{M-m}$

⑪ $\sin\theta$　⑫ $\cos\theta$　⑬ $\tan\theta$　⑭ $\dfrac{1}{\tan\theta}$　⑮ $\dfrac{1}{2}m(u^2 + u_y{}^2)$

⑯ $\dfrac{1}{2}m(u_x{}^2 + u_y{}^2)$　⑰ $\dfrac{1}{2}m(u^2\tan^2\theta + u_y{}^2)$　⑱ $5\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{66}}$

⑲ $6\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{56}}$　⑳ $6\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{66}}$

解答　(1)　(ア)　②　(イ)　⑦　(ウ)　⑩　(エ)　⑯

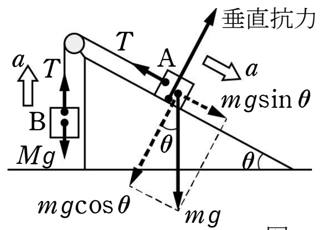
(2)　(オ)　②　(カ)　④　(キ)　⑧　(ク)　⑬　(ケ)　⑮　(コ)　⑱

解説

(1)　(ア)(イ)　物体A，Bにはたらく力は図aのようになる。Aにはたらく力のうち斜面に直角な成分はつりあっているので，斜面に平行な方向について運動方程式を立てると

$ma = mg\sin\theta - T$　……［a］

(ア)の答え　……②　(イ)の答え　……⑦



図a

(ウ)(エ)　物体Bについて運動方程式を立てると

$Ma = T - Mg$　……［b］

［a］,［b］式を辺々加えると

$(M+m)a = (m\sin\theta - M)g$

よって

$$a=\frac{m\sin\theta-M}{M+m}\cdot g$$ (ウ) の答え ……⑩

[b] 式を T について解き，a を代入すると

$$T=M(g+a)=M\left(1+\frac{m\sin\theta-M}{M+m}\right)g$$

$$=\frac{(M+m)+m\sin\theta-M}{M+m}Mg=\frac{1+\sin\theta}{M+m}m\cdot Mg$$ (エ) の答え ……⑯

(2) (オ)(カ) 物体 A と三角台 C からなる系に対して x 方向の外力がはたらいていないので，x 方向については全体の重心の速度は不変である。この場合では，初め重心の速度は 0 であるから，重心の x 座標は一定となる。初めの重心の位置を $x=0$ とし，物体 A，三角台 C の変位の x 成分をそれぞれ x_A，x_C，重心の x 座標を x_G とすると，重心の式

「$x_G=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$」より $x_G=\dfrac{mx_A+Mx_C}{m+M}=0$

よって $x_C=-\dfrac{m}{M}x_A$ ……[c]

となる。一般に等加速度直線運動の式

「$v=v_0+at$」と「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」より，初速度 0 の等加速度直線運動では

$$v=0+at \qquad \text{よって} \qquad a=\frac{v}{t}$$

$$x=0\times t+\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\frac{v}{t}t^2=\frac{1}{2}vt$$ ……[d]

が成りたつので，物体 A が斜面を L だけ下る時間を t とすると，[c] 式と [d] 式より

$$\frac{x_C}{x_A}=\frac{\frac{1}{2}Ut}{\frac{1}{2}ut}=\frac{U}{u}=-\frac{m}{M}$$ ……[e]

よって $U=-\dfrac{m}{M}\times u$ (左向き)

(オ) の答え ……② (カ) の答え ……④

別解 物体 A にはたらく三角台 C からの垂直抗力は斜面と直角で右上の向きである。C はこの力の反作用を斜面と直角で左下の向きに受けるので，C は左 (負) の向きに移動する。また，運動量の保存を用いると，A が斜面を下って右へ移動するので，水平方向の運動量の合計が 0 になるために C は左へ移動する。このことを式で表すと，運動量の式「$P=mv$」より

$$0=mu+MU \qquad \text{よって} \qquad U=-\frac{m}{M}u$$

(キ) 相対速度の式「$v_{AB}=v_B-v_A$」より，観察者 E (速度 U) から見た A の水平方向の速度 u_x は $u_x=u-U$

となる。[e] 式を代入すると

$$u_x=u-\left(-\frac{m}{M}u\right)=\frac{M+m}{M}\cdot u$$ ……⑧

(ク) 図 b より $\dfrac{u_y}{u_x}=\tan\theta$

よって $u_y=\tan\theta\cdot u_x$ ……⑬

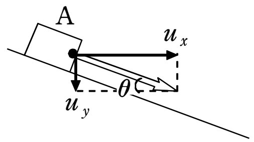


図 b

(ケ) 物体 A の重力による位置エネルギーが，移動後の A と三角台 C の運動エネルギーになる。観察者 D から見た A の速度は x 成分 u，y 成分 u_y (y 成分は観察者 D，E のどちらから見ても同じである) なので，各エネルギーの式「$U_g=mgh$」「$K=\dfrac{1}{2}mv^2$」より，力学的エネルギー保存の式は

$$mgL\sin\theta=\frac{1}{2}MU^2+\frac{1}{2}m(u^2+u_y^2)$$ ……⑮

(コ) (キ)(ク) の結果から

$$u_y^2=(\tan 45^\circ\times u_x)^2=\left(1\times\frac{5m+m}{5m}u\right)^2=\frac{36}{25}u^2$$

(カ) の結果から

$$U^2=\left(-\frac{m}{5m}u\right)^2=\frac{1}{25}u^2$$

なので，(ケ) の式に各値を代入すると

$$mgL\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5m\cdot\frac{1}{25}u^2+\frac{1}{2}m\left(u^2+\frac{36}{25}u^2\right)$$

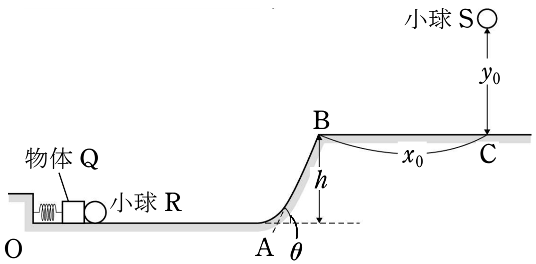
整理すると

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{25}(5+25+36)u^2=\frac{\sqrt{2}}{2}gL$$

$$u^2=\frac{25\sqrt{2}}{66}gL \qquad \text{よって} \qquad u=5\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{66}}\times\sqrt{gL}$$ ……⑱

２．

なめらかな水平面上に置いたばね定数 k のばねがある。図のようにばねの一端を壁に固定し，他端には質量 M の物体Qを取りつけた。物体Qに質量 m の小球Rを押しつけて，ばねを自然の長さから x だけ縮めた状態から小球Rを静かにはなした。物体Qと小球Rは一体となって運動を始め，ばねが自然の長さになった位置で小球Rは物体Qから離れた。小球Rは水平面OA上をすべり，水平面と点Aでつながったなめらかな斜面AB上をすべり上がり，斜面の上端Bから斜め上方に飛び出した。その後，水平面BC上の点Bから x_0 だけ離れた点Cに落下した。斜面ABと水平面OAとのなす角を θ とし，水平面BCと水平面OAとの高低差は h とする。また，重力加速度の大きさは g とする。次の問いに答えよ。



(1)　小球Rが物体Qから離れた直後の速さ v_0 を，M，m，k，x を用いて表せ。

(2)　小球Rが点Bから飛び出したときの速さ v_1 を，v_0，g，h を用いて表せ。

(3)　小球Rが点Bから飛び出した後，到達した最高点の高さを水平面BCからの距離として，v_1，g，θ を用いて表せ。

(4)　小球Rが点Bから飛び出してから，点Cに落下するまでに経過した時間 t_1 を，v_1，θ，x_0 を用いて表せ。

(5)　点C上の高さ y_0 の位置にあった小球Sを，小球Rが点Bを飛び出した時刻から $\dfrac{t_1}{2}$ 後に静かに落下させたところ，小球Rと点Cで衝突した。$\tan\theta$ を，x_0，y_0 を用いて表せ。

解答　(1)　$x\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$　　(2)　$\sqrt{v_0{}^2-2gh}$　　(3)　$\dfrac{v_1{}^2\sin^2\theta}{2g}$　　(4)　$\dfrac{x_0}{v_1\cos\theta}$

(5)　$\dfrac{4y_0}{x_0}$

解説

(1)　小球Rが物体Qから離れるまで，両者は一体となって運動をしているので，QとRがもつ力学的エネルギーの和が保存する。運動エネルギーの式「$K=\dfrac{1}{2}mv^2$」，弾性力による位置エネルギーの式「$U_k=\dfrac{1}{2}kx^2$」を用いて，運動開始から小球Rが離れるまでについて力学的エネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(M+m)v_0{}^2$$

よって　$v_0=x\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$

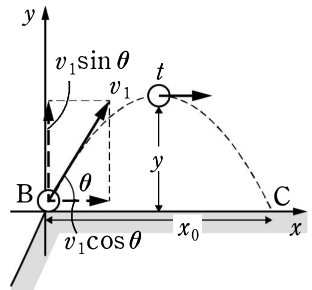
(2)　小球Rが物体Qから離れた後は，Rがもつ力学的エネルギーが保存する。水平面OAを高さの基準として重力による位置エネルギーの式「$U_g=mgh$」を用いると，力学的エネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv_1{}^2+mgh$$

よって

$$v_1=\sqrt{v_0{}^2-2gh}$$

(3)　図aのように，点Bを原点として水平面BC上に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる。小球Rの y 方向の運動は，初速度 $v_1\sin\theta$，加速度 $-g$ の等加速度運動である。最高点の高さを y，点Bから最高点までの時間を t とする。最高点は速度の y 成分 $v_y=0$ となる点なので，等加速度直線運動の式「$v=v_0+at$」と「$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$」を y 方向について用いると



図a

$$0=v_1\sin\theta+(-g)t$$

よって　$t=\dfrac{v_1\sin\theta}{g}$　……①

$$y=v_1\sin\theta\cdot t+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$=v_1\sin\theta\cdot\frac{v_1\sin\theta}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_1\sin\theta}{g}\right)^2$$

$$=\frac{v_1{}^2\sin^2\theta}{2g}\quad\cdots\cdots②$$

別解　等加速度直線運動の式「$v^2-v_0{}^2=2ax$」を y 方向について用いて

$$0^2-(v_1\sin\theta)^2=2\times(-g)\times y$$

よって

$$y=\frac{v_1{}^2\sin^2\theta}{2g}$$

また，最高点における小球 R の速度の向きは x 方向正の向きで，大きさは $v_1\cos\theta$ であることから，点 B と最高点の間について力学的エネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}mv_1{}^2=\frac{1}{2}m(v_1\cos\theta)^2+mgy$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて

$$y=\frac{v_1{}^2}{2g}(1-\cos^2\theta)=\frac{v_1{}^2\sin^2\theta}{2g}$$

(4)　小球 R の x 方向の運動は，速度 $v_1\cos\theta$ の等速直線運動なので，「$x=vt$」より

$$x_0=v_1\cos\theta\cdot t_1$$

よって

$$t_1=\frac{x_0}{v_1\cos\theta}\quad\cdots\cdots ③$$

(5)　小球 R の最高点から先の y 方向の運動は自由落下と同じであり，上昇と下降の運動の対称性より，落下時間は $\frac{t_1}{2}$ である。よって，小球 S は小球 R が最高点に達した瞬間に自由落下を始め，S と R は同時に水平面 BC に着地して衝突する。ゆえに，(3) で求めた y と y_0 は等しい。② 式より

$$y_0=\frac{v_1{}^2\sin^2\theta}{2g}\quad\cdots\cdots ④$$

また，① 式の t が ③ 式の t_1 の半分であることから

$$\frac{v_1\sin\theta}{g}=\frac{1}{2}\times\frac{x_0}{v_1\cos\theta}$$

よって

$$x_0=\frac{2v_1{}^2\sin\theta\cos\theta}{g}\quad\cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ 式より

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{\dfrac{v_1{}^2\sin^2\theta}{2g}}{\dfrac{2v_1{}^2\sin\theta\cos\theta}{g}}=\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{4}$$

ゆえに

$$\tan\theta=\frac{4y_0}{x_0}$$