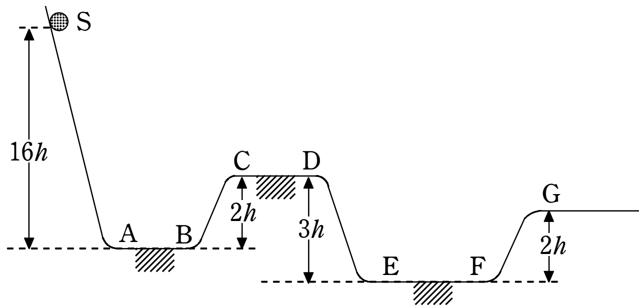
1．

図のような，なめらかな斜面と 4 つの水平面とからなるコースがある。

質量 m〔kg〕の小球を，最初の水平面から 16 h〔m〕の高さの地点 S から静かにすべらせた。このとき，小球はコースから離れることなく斜線部を通過する。斜線部を通過した後の速さは，通過する前の速さの $\frac{1}{N}$ になるとして，次の問いに答えよ。ただし，g〔m/s^2〕を重力加速度の大きさ，N，h をそれぞれある正の定数とする。



(1)　最初の水平面を基準にした小球の S での位置エネルギーを求めよ。

(2)　地点 G に達するために，小球が地点 F でもつ必要のある最小の運動エネルギーを求めよ。

(3)　$N=1$ のとき

(a)　地点 A での小球の運動エネルギーを求めよ。

(b)　地点 G での小球の運動エネルギーを求めよ。

(4)　$N=2$ のとき

(a)　地点 B での小球の運動エネルギーを求めよ。

(b)　地点 D での小球の速さを求めよ。

(c)　小球は地点 G に達するか，達しないか。また，達しない場合は，F からどの高さまで達するか。その高さを h で表せ。

(5)　小球が地点 G に達するために N が満たす条件式を求めよ。

解答　(1)　$16mgh$〔J〕　(2)　$2mgh$〔J〕　(3) (a)　$16mgh$〔J〕　(b)　$15mgh$〔J〕

(4) (a)　$4mgh$〔J〕　(b)　$\sqrt{gh}$〔m/s〕　(c)　地点 G に達しない，$\frac{7}{8}h$〔m〕

(5)　$\frac{16}{N^6}-\frac{2}{N^4}+\frac{3}{N^2}-2\geqq 0$

解説

(1)　面 AB から見て，地点 S は 16 h〔m〕高い所にあるので，求める位置エネルギーを U_g〔J〕とすると，重力による位置エネルギーの式「$U_g=mgh$」より

$$U_g=mg\times 16h=\boldsymbol{16mgh}\text{〔J〕}$$

(2)　地点 F，G での小球の速さを v_F，v_G〔m/s〕，面 EF を重力による位置エネルギーの基準として，運動エネルギーの式「$K=\frac{1}{2}mv^2$」を用いて FG 間で力学的エネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}mv_F{}^2=\frac{1}{2}mv_G{}^2+mg\times 2h$$

となる。題意より，これを満たす v_G が存在すればよいので

$$\frac{1}{2}mv_G{}^2=\frac{1}{2}mv_F{}^2-2mgh\geqq 0$$

よって　$\frac{1}{2}mv_F{}^2\geqq\boldsymbol{2mgh}$〔J〕　……　①

(3) (a)　$N=1$ のとき，斜線部を小球が通過しても速さは変わらないので，コース上のすべてで力学的エネルギーが保存する。

面 AB を重力による位置エネルギーの基準として，SA 間で力学的エネルギー保存の式を立てる。地点 A での速さを v_A〔m/s〕として

$$mg\times 16h=\frac{1}{2}mv_A{}^2$$

よって　$\frac{1}{2}mv_A{}^2=\boldsymbol{16mgh}$〔J〕　……　②

(b)　面 AB を基準とした地点 G の高さは h である。地点 G での速さを v_G〔m/s〕として SG 間で力学的エネルギー保存の式を立てると

$$mg\times 16h=\frac{1}{2}mv_G{}^2+mgh$$

よって　$\frac{1}{2}mv_G{}^2=\boldsymbol{15mgh}$〔J〕

(4) (a)　地点 A，B，C，… での小球の速さをそれぞれ v_A，v_B，v_C，… とおく。斜線部で速さが $\frac{1}{N}$ 倍になるとき，運動エネルギー「$K=\frac{1}{2}mv^2$」は $\frac{1}{N^2}$ 倍になる。

このときも地点 A での運動エネルギーは ② 式となり，地点 B での運動エネルギーは ② 式の $\frac{1}{N^2}$ 倍 $\left(\frac{1}{4}\text{ 倍}\right)$ になるので

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2=\frac{1}{4}\times 16mgh=\boldsymbol{4mgh}\text{〔J〕}\quad\cdots\cdots\ ③$$

(b)　面 AB を重力による位置エネルギーの基準として，BC 間で力学的エネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2=\frac{1}{2}mv_C{}^2+mg\times 2h$$

③ 式を代入すると，地点 C での運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv_C{}^2=4mgh-2mgh=2mgh$$

となる。地点 D での運動エネルギーは C の $\frac{1}{N^2}$ 倍 $\left(\frac{1}{4}\text{ 倍}\right)$ になるので

$$\frac{1}{2}mv_D{}^2=\frac{1}{4}\times 2mgh=\frac{1}{2}mgh \quad \cdots\cdots ④$$

よって　$v_D=\sqrt{gh}$〔m/s〕

(c)　面 EF を重力による位置エネルギーの基準として，DE 間で力学的エネルギー保存の式を立てると

$$\frac{1}{2}mv_D{}^2+mg\times 3h=\frac{1}{2}mv_E{}^2$$

④ 式を代入すると，地点 E での運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}mv_E{}^2=\frac{1}{2}mgh+3mgh=\frac{7}{2}mgh$$

となる。地点 F での運動エネルギーは地点 E の $\frac{1}{N^2}$ 倍 $\left(\frac{1}{4}\text{ 倍}\right)$ になるので

$$\frac{1}{2}mv_F{}^2=\frac{1}{4}\times\frac{7}{2}mgh=\frac{7}{8}mgh \quad \cdots\cdots ⑤$$

これは ① 式の条件を満たさないので，**地点 G には達しない。**

地点 F を通過後，最も高い所に達した地点の F からの高さを H とすると，この間での力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_F{}^2=mgH$$

⑤ 式を代入して　$\frac{7}{8}mgh=mgH$

よって　$H=\frac{7}{8}h$〔m〕

(5)　(4) と同様にして，各区間で力学的エネルギー保存の式 (または運動エネルギーが $\frac{1}{N^2}$ 倍となる式) を立てると

SA 間：$mg\times 16h=\frac{1}{2}mv_A{}^2$

AB 間：$\frac{1}{2}mv_B{}^2=\frac{1}{N^2}\times\frac{1}{2}mv_A{}^2$

BC 間：$\frac{1}{2}mv_B{}^2=\frac{1}{2}mv_C{}^2+mg\times 2h$

CD 間：$\frac{1}{2}mv_D{}^2=\frac{1}{N^2}\times\frac{1}{2}mv_C{}^2$

DE 間：$\frac{1}{2}mv_D{}^2+mg\times 3h=\frac{1}{2}mv_E{}^2$

EF 間：$\frac{1}{2}mv_F{}^2=\frac{1}{N^2}\times\frac{1}{2}mv_E{}^2$

以上の式より，地点 F での運動エネルギーを m，g，h，N で表すと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_F{}^2&=\frac{1}{N^2}\left(\frac{1}{2}mv_D{}^2+3mgh\right)\\&=\frac{1}{N^2}\left(\frac{1}{N^2}\times\frac{1}{2}mv_C{}^2+3mgh\right)\\&=\frac{1}{N^2}\left\{\frac{1}{N^2}\left(\frac{1}{2}mv_B{}^2-2mgh\right)+3mgh\right\}\\&=\frac{1}{N^2}\left\{\frac{1}{N^2}\left(\frac{1}{N^2}\times\frac{1}{2}mv_A{}^2-2mgh\right)+3mgh\right\}\\&=\frac{1}{N^2}\left\{\frac{1}{N^2}\left(\frac{1}{N^2}\times 16mgh-2mgh\right)+3mgh\right\}\\&=\left(\frac{16}{N^6}-\frac{2}{N^4}+\frac{3}{N^2}\right)mgh\end{aligned}$$

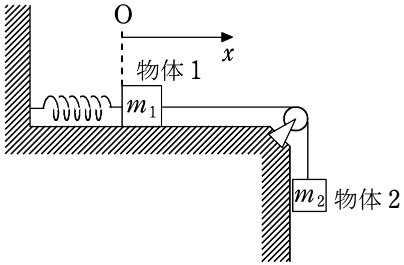
これが ① 式を満たせば，地点 G に達するので

$$\left(\frac{16}{N^6}-\frac{2}{N^4}+\frac{3}{N^2}\right)mgh\geqq 2mgh$$

よって，N の条件式は　$\boldsymbol{\frac{16}{N^6}-\frac{2}{N^4}+\frac{3}{N^2}-2\geqq 0}$

2．

次の文章の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ク}}$ の中に適切な数式を入れよ。また，$\boxed{\text{a}}$ には適切なグラフを，$\boxed{\text{b}}$ には運動のようすを簡単に記述せよ。



図のように，2 つの物体が摩擦のない滑車を使って，ばね定数 k〔N/m〕のばねに接続されている。質量 m_1〔kg〕の物体 1 はなめらかで水平な台上にあり，質量 m_2〔kg〕の物体 2 は糸につながれ，鉛直につり下げられている。水平右向きに x 軸をとり，ばねが自然の長さのときの物体 1 の左端を x 軸の原点とする。また，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。ただし，滑車とばね，および糸の質量は無視できるとする。

(1) ばねが自然の長さの状態から，物体 1 を静かにはなしたところ，ばねが伸び，物体 1 は水平右向きに，物体 2 は鉛直下向きに動きだした。物体 1 の左端が x〔m〕の位置にあるとき，糸の張力の大きさを T〔N〕，物体 1 の加速度を右向きを正にとって a〔m/s²〕とすると，物体 1 の運動方程式は $m_1a=\boxed{\text{ア}}$ となる。また，このときの物体 2 の運動方程式は $m_2a=\boxed{\text{イ}}$ となる。以上から，物体 1 と物体 2 の加速度は，T を使わずに表すと $a=\boxed{\text{ウ}}$〔m/s²〕となる。

(2) (1) で鉛直下向きに動きだした物体 2 は，やがて最下点に達した。このときのばねの伸び h〔m〕を力学的エネルギー保存則から求めよう。物体 1 は水平方向に運動するので，物体 1 の重力による位置エネルギーは変化しない。ばねが自然の長さにあるとき，物体 1 と物体 2 の重力による位置エネルギーの和を 0 J にとる。ばねが x〔m〕伸びたとき，2 つの物体の速さを v〔m/s〕，運動エネルギーの和を K〔J〕とすると，$K=\boxed{\text{エ}}$〔J〕となる。また，2 つの物体の重力による位置エネルギーの和は $\boxed{\text{オ}}$〔J〕，ばねのもつ弾性エネルギーは $\boxed{\text{カ}}$〔J〕となる。力学的エネルギー保存則から，3 つのエネルギーの和はばねが自然の長さのときの力学的エネルギーと等しい。この関係から，物体 2 が最下点に達したときのばねの伸びは $h=\boxed{\text{キ}}$〔m〕と求められる。

2 つの物体が動きだしてから物体 2 が最下点に到達するまでの間に，K はばねの伸びに対して $\boxed{\text{a}}$ のように変化する (ただし，K の最大値を K_0〔J〕とする)。その後，物体 2 は上昇と下降をくり返す。物体 1 と物体 2 の運動は単振動であり，その周期は $\boxed{\text{ク}}$〔s〕となる。物体 2 が最高点に達したときに糸を切断したところ，物体 1 は $\boxed{\text{b}}$。

解答 (1) (ア) $T-kx$ (イ) m_2g-T

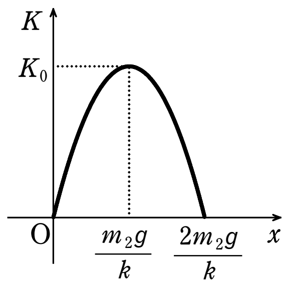
(ウ) $-\dfrac{kx-m_2g}{m_1+m_2}$

(2) (エ) $\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$ (オ) $-m_2gx$

(カ) $\dfrac{1}{2}kx^2$ (キ) $\dfrac{2m_2g}{k}$

(a) 右図 (ク) $2\pi\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{k}}$

(b) 左端が原点の位置で静止し続ける



解説

ヒント (キ) 『物体 2 が最下点に達したとき』⟹ 物体 1 と物体 2 の速さは 0 ⟹ $K=0$

(a) 力学的エネルギー保存則を用いて，運動エネルギーの和 K をばねの伸び x の関数として表す。

(ク) (ウ) で求めた加速度の式を，単振動の加速度の式「$a=-\omega^2x$」の形に変形し，角振動数 ω を求める。

(b) 力学的エネルギー保存則より，物体 2 の最高点は初めの位置と同じである。

(1) 物体にはたらく力を図 a に示す。正の向きに注意して，運動方程式「$ma=F$ (F は合力)」より

(ア) $m_1a=T-kx$

(イ) $m_2a=m_2g-T$

(ウ) (ア) と (イ) の式を辺々足しあわせて T を消去すれば

$$a=-\frac{kx-m_2g}{m_1+m_2}\ \text{〔m/s}^2\text{〕}$$

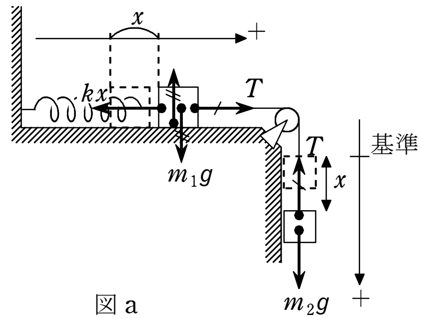


図 a

(2) (エ) $K=\dfrac{1}{2}m_1v^2+\dfrac{1}{2}m_2v^2=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$〔J〕

(オ) 重力による位置エネルギーの基準から見て，物体 1 の高さは変わらず物体 2 の高さは x だけ下がるので

$U_{\text{重力}}=0+m_2g(-x)=-m_2gx$〔J〕

(カ) ばねは x だけ伸びているので $U_{\text{ばね}}=\dfrac{1}{2}kx^2$〔J〕

(キ)　初めの状態(ばねは自然の長さ)と，おわりの状態(物体2が h だけ下の最下点＝ばねが h だけ伸びている)での力学的エネルギー保存則

「$\frac{1}{2}mv^2+mgh+\frac{1}{2}kx^2=$一定」を用いると

$$0+0+0=0+m_2g(-h)+\frac{1}{2}kh^2$$

$h\fallingdotseq 0$ であるから　$h=\frac{2m_2g}{k}$〔m〕

(a)　初めの状態とばねが x 伸びた状態とで，力学的エネルギー保存則を用いると

$$0=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}m_2v^2+m_2g(-x)+\frac{1}{2}kx^2$$

よって　$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=-\frac{1}{2}kx^2+m_2gx$

$$=-\frac{1}{2}k\left(x-\frac{m_2g}{k}\right)^2+\frac{m_2{}^2g^2}{2k}$$

この式は，$(x,\ K)=\left(\frac{m_2g}{k},\ \frac{m_2{}^2g^2}{2k}\right)$ を頂点とした上に凸の放物線の式である。

$$K_0=\frac{m_2{}^2g^2}{2k}\text{〔J〕}$$

とおくと，答えは図 b のグラフになる。

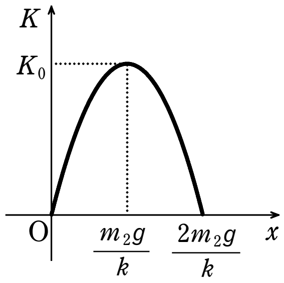


図 b

(ク)　(ウ)の答えより

$$a=-\frac{kx-m_2g}{m_1+m_2}=-\frac{k}{m_1+m_2}\left(x-\frac{m_2g}{k}\right)$$ ※A←

$x'=x-\frac{m_2g}{k}$ とおけば，$a=-\frac{k}{m_1+m_2}x'$ となる。この式と単振動の式 $a=-\omega^2x$ を比較すれば，角振動数 ω は　$\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$

よって，求める周期 T_1〔s〕は

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}\text{〔s〕}$$ ※B←

(b)　力学的エネルギーが保存するので，物体2の最高点は初めの出発点と同じところである。このとき速さは0になり，ばねが自然の長さの状態であるから，糸を切断すると物体1にはたらく水平方向の力は0になり，物体1は左端が原点の位置で静止し続ける。

←※A　この式は，$x=\frac{m_2g}{k}$ を中心とする単振動を表している。

←※B　単振動の周期の公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ で，m を m_1+m_2 と置きかえて求めてもよい。