1．

次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{カ}}$ に入れるべき答えを記せ。重力加速度の大きさを g とする。

自然の長さがともに L の軽く伸び縮みしない糸と軽いばねを用いて，質量 M の小さな物体を天井と壁面に対して図 1 に示すように設置した。図 1 の状態でばねは天井と平行であり，ばねの全体の長さは L_1 である。図 1 の状態で，糸にはたらく張力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ である。また，使用しているばねのばね定数は $\boxed{\text{イ}}$ であり，ばねに蓄積されている弾性エネルギーは $\boxed{\text{ウ}}$ である。

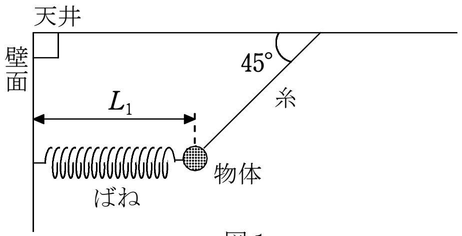


図 1

次に，糸とばねを取りつける位置を変え，図 2 に示すように物体の天井からの距離が $\dfrac{L}{2}$ となるようにした。このときも，ばねと天井は平行となっている。図 2 の状態での物体の重力による位置エネルギーは図 1 と比べて $\boxed{\text{エ}}$ だけ増加している。また，図 2 の状態で糸にはたらく張力の大きさは $\boxed{\text{オ}}$ であり，また物体の壁面からの距離は $\boxed{\text{カ}}$ である。

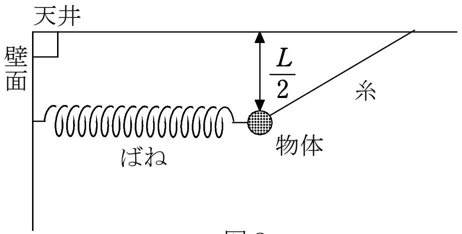


図 2

解答　(ア)　$\sqrt{2}\,Mg$　　(イ)　$\dfrac{Mg}{L_1-L}$　　(ウ)　$\dfrac{1}{2}Mg(L_1-L)$　　(エ)　$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}MgL$

(オ)　$2Mg$　　(カ)　$\sqrt{3}\,L_1-(\sqrt{3}-1)L$

解説

(ア)　問題の図 1 の場合，物体にはたらく力は図 a となる。糸の張力の大きさを T_1 として鉛直方向について力のつりあいの式を立てると

$$T_1\sin 45^\circ - Mg = 0$$

よって　$T_1 = \sqrt{2}\,Mg$

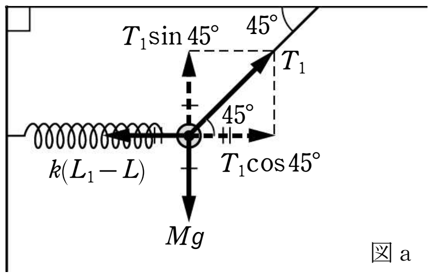


図 a

(イ)　ばね定数を k とし，ばねの伸びが L_1-L であることに注意してフックの法則「$F=kx$」を用いると，水平方向の力のつりあいの式は

$$T_1\cos 45^\circ - k(L_1-L) = 0$$

T_1 を代入して　　$k(L_1-L)=\sqrt{2}\,Mg\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　　$k=\dfrac{Mg}{L_1-L}$

(ウ)　弾性エネルギーの式「$U_k=\dfrac{1}{2}kx^2$」に (イ) の k，ばねの伸び L_1-L を代入して

$$U_k=\frac{1}{2}\times\frac{Mg}{L_1-L}\times(L_1-L)^2$$

$$=\frac{1}{2}Mg(L_1-L)$$

(エ)　問題の図 1 の場合，糸の長さは L であるから，物体と天井の間の距離は $L\sin 45^\circ$ となる。図 1 と図 2 を比べると，物体の高さは

$$L\sin 45^\circ-\frac{L}{2}=\frac{L}{\sqrt{2}}-\frac{L}{2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}L$$

だけ高くなっている。重力による位置エネルギーの式「$U_g=mgh$」より

$$U_g=Mg\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}L=\frac{\sqrt{2}-1}{2}MgL$$

だけ増加した。

(オ)　問題の図 2 の場合，物体にはたらく力は図 b となる。ここで糸の長さ L と天井までの距離 $\dfrac{L}{2}$ の比から，糸と天井のなす角度は 30° である。糸の張力の大きさを T_2 として鉛直方向について力のつりあいの式を立てると

$$T_2\sin 30^\circ - Mg = 0$$

よって　　$T_2=2Mg$

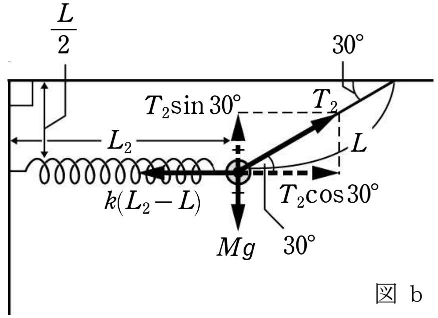


図 b

(カ)　求める距離，すなわちばねの全長を L_2 として水平方向について力のつりあいの式を立てると

$$T_2\cos 30^\circ - k(L_2-L)=0$$

T_2 と k を代入すると

$$2Mg\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{Mg}{L_1-L}(L_2-L)=0$$

よって　　$L_2-L=\sqrt{3}\,(L_1-L)$

$$L_2=\sqrt{3}\,L_1-(\sqrt{3}-1)L$$

２．

ばね定数 k_1，長さ l_0 のばねを固定点からつるし，その下端に質量 m のおもりをつけるとばねは a だけ伸びてつりあった (状態 1 とする)。次にこのおもりの下部にばね定数 k_2，長さ l_0 の 2 番目のばねをつけて， その下部をゆっくり引っ張って 2 つのばね全体の伸びが状態 1 から測って b になったところで静止させた (状態 2 とする)。ばね自体の重さは無視し，重力加速度は g とせよ。

(1)　状態 1 においてばねにたくわえられているエネルギーはいくらか。

(2)　状態 2 において 2 つのばねのそれぞれの伸びを求めよ。

(3)　2 つのばね全体のエネルギーはどれだけ変化したか。

(4)　状態 2 にもっていくとき，ばねの下部を急激に引っ張ったとしたら，ゆっくり引っ張った場合と何か違いがあるか。

(5)　急激に引っ張った場合のばね全体のエネルギーの変化を求めよ。

(6)　ばね全体の伸びは同じであるのに，(3) と (5) でエネルギーの変化量が違うとすれば多い方のエネルギーは何に使われるのだろうか。

$\boxed{\text{解答}}$　(1)　$\dfrac{1}{2}k_1a^2$　　(2)　上のばね：$a+\dfrac{k_2b}{k_1+k_2}$，下のばね：$\dfrac{k_1b}{k_1+k_2}$

(3)　$\dfrac{k_1k_2b^2}{2(k_1+k_2)}$

(4)　上のばねの伸びは a，下のばねの伸びは b となる。

(5)　$\dfrac{1}{2}k_2b^2$　　(6)　おもりの単振動のエネルギー

解説

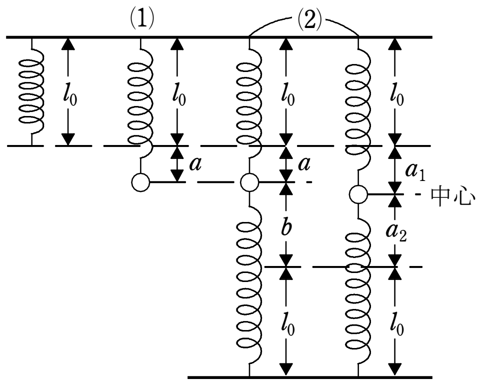
(1)　$\dfrac{1}{2}k_1a^2$

(2)　ばね定数 k_1 のばねの伸びを a_1，ばね定数 k_2 のばねの伸びを a_2 とすると

$$a_1+a_2=a+b,\quad k_1a=mg,$$
$$k_1a_1=mg+k_2a_2$$

ゆえに　$a_1=a+\dfrac{k_2b}{k_1+k_2}$，

$$a_2=\frac{k_1b}{k_1+k_2}$$



(3)　2つのばねの弾性エネルギーは増加し，おもりの重力の位置エネルギーは減少する。

$$\frac{1}{2}k_1{a_1}^2+\frac{1}{2}k_2{a_2}^2-\frac{1}{2}k_1a^2-mg(a_1-a)$$

$$=\frac{1}{2}k_1\left(a+\frac{k_2b}{k_1+k_2}\right)^2+\frac{1}{2}k_2\left(\frac{k_1b}{k_1+k_2}\right)^2-\frac{1}{2}k_1a^2-mg\frac{k_2b}{k_1+k_2}=\boldsymbol{\frac{k_1k_2b^2}{2(k_1+k_2)}}$$

(4)　おもりの慣性により，上のばねの伸びは a で変わらず，下のばねの伸びが b になる。

(5)　上のばねの弾性エネルギーとおもりの重力の位置エネルギーは変わらないから

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}k_2b^2}$$

(6)　$$\frac{1}{2}k_2b^2-\frac{k_1k_2b^2}{2(k_1+k_2)}=\frac{1}{2}k_2b^2\left(1-\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)=\frac{1}{2}\frac{{k_2}^2b^2}{k_1+k_2}=\frac{1}{2}(k_1+k_2)\left(\frac{k_2b}{k_1+k_2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}(k_1+k_2)(a_1-a)^2$$

これは，状態(2)のおもりのつりあいの位置を中心とし，振幅 (a_1-a) の**単振動のエネルギー**を表している。