1．

　等しい質量 m をもった2つの物体A，Bを，自然の長さ l_0，ばね定数 k の質量が無視できる丈夫なばねで連結し，図1のようにBを下にして静かに水平面上に置いた。重力加速度の大きさを g として，以下の問題に答えよ。

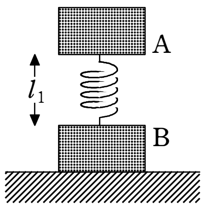


図1

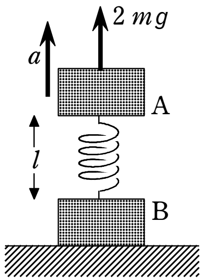


図2

〔A〕 物体A，Bとばねは，図1のようなつりあい状態にある。

(1)　このときのばねの長さ l_1 を求めよ。

(2)　ばねにたくわえられている弾性力の位置エネルギーはいくらか。

(3)　Bにはたらく垂直抗力はいくらか。

〔B〕 次に，鉛直上向きの一定の力 $2mg$ をはたらかせて物体Aを引っぱりあげると，Aは初速度0で運動を始める。

(4)　図2は，Aが加速度 a で運動していてBはまだ静止の状態にある状況を示したものである。このときのばねの長さを l として，Aに対するニュートンの運動方程式を書け。

(5)　このとき，Bにはたらいている垂直抗力はいくらか。

〔C〕 力を加えつづけていると，やがてBが動き始める。

(6)　Bが動き出す瞬間のばねの長さ l_2 はいくらか。

(7)　Aに $2mg$ の力を加え始めてからBが動き出す瞬間までに，この力がAにする仕事 W はいくらか。

(8)　Aに力を加え始めてからBが動き出す瞬間までの，重力によるAの位置エネルギーの増加量 $\varDelta V_{\mathrm{A}}$ を求めよ。

(9)　Aに力を加え始めてからBが動き出す瞬間までの，ばねにたくわえられた弾性力の位置エネルギーの増加量 $\varDelta V$ はいくらか。

(10)　Bが動き出す瞬間のAの速さを v_0 とするとき，文字 W，$\varDelta V_{\mathrm{A}}$，$\varDelta V$ 等を使って，力学的エネルギーの変化とAに加えた力がした仕事との間になりたつ関係式を書け。

解答　〔A〕 (1)　$l_0-\dfrac{mg}{k}$　(2)　$\dfrac{m^2g^2}{2k}$　(3)　$2mg$

〔B〕 (4)　$ma=2mg+k(l_0-l)-mg$　(5)　$mg+k(l_0-l)$

〔C〕 (6)　$l_0+\dfrac{mg}{k}$　(7)　$\dfrac{4m^2g^2}{k}$　(8)　$\dfrac{2m^2g^2}{k}$　(9)　0

(10)　$0+W=\varDelta V_{\mathrm{A}}+\varDelta V+\dfrac{1}{2}m{v_0}^2$

解説

ばねの全長と伸び，縮みを区別する。

〔A〕 物体Aにはたらく力は，重力 mg と上向きのばねの復元力 $k(l_0-l_1)$ である。

(1)　Aの力のつりあいから

$k(l_0-l_1)-mg=0$　より

$$l_1=l_0-\frac{mg}{k}$$

(2)　弾性力による位置エネルギー $E_k=\dfrac{1}{2}kx^2$

$$E_k=\frac{1}{2}k(l_0-l_1)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{m^2g^2}{2k}$$

(3)　Bには重力 mg と復元力 $k(l_0-l_1)$ が下向きに，垂直抗力 N が上向きにはたらく。

$N-mg-k(l_0-l_1)=0$　より

$$N=mg+k(l_0-l_1)=2mg$$

〔B〕 (4)　Aには力 $2mg$ と，復元力 $k(l_0-l)$ が上向きに，重力 mg が下向きにはたらく。運動方程式は

$$ma=2mg+k(l_0-l)-mg$$

注　ばねが自然の長さより伸びているとすれば，復元力 $k(l-l_0)$ は下向きにはたらく。

(5)　Bには重力 mg と復元力 $k(l_0-l)$ が下向きに，垂直抗力 N が上向きにはたらき，静止の状態だからこれら3力はつりあっている。

$N-mg-k(l_0-l)=0$

ゆえに　$N=mg+k(l_0-l)$

〔C〕 (6)　Bが動き出す瞬間の垂直抗力 N は0であるから，(5)より　$0=mg+k(l_0-l_2)$

ゆえに　$l_2=l_0+\dfrac{mg}{k}$

(7)　力を加え始めてから動き出すまでに物体Aが移動した距離 $\varDelta x$ は

$$\varDelta x=l_2-l_1=\frac{2mg}{k}$$

$2mg$ の力がした仕事 W は，$W=Fx$ より

$$W=2mg\cdot\frac{2mg}{k}=\frac{4m^2g^2}{k}$$

(8)　Aは $\varDelta x$ 上昇したから

$$\varDelta V_{\mathrm{A}}=mg\cdot\varDelta x=\frac{2m^2g^2}{k}$$

(9)　B が動き出す瞬間の弾性力による位置エネルギー $E_k{}'$ は

$$E_k{}'=\frac{1}{2}k(l_0-l_2)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{m^2g^2}{2k}$$

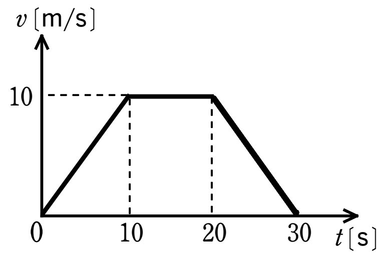
ゆえに　$\varDelta V=E_k{}'-E_k=0$

(10)　(はじめのエネルギー)＋(された仕事)＝(終わりのエネルギー)　より

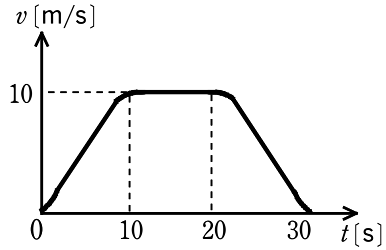
$$0+W=\varDelta V_{\mathrm{A}}+\varDelta V+\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

２．

内部に乗っている人を含めて質量 2000 kg のエレベーターが，鉛直に上昇し始めてから止まるまで，速度 v が時間 t とともに１図に示すように変化したとして，以下の問い (1)〜(6) に答えよ。重力加速度は $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$ として計算せよ。さらに，最後の問い (7) は２図を参照して答えよ。



１図



２図

(1)　エレベーターの加速度 a と時間 t の関係をグラフに表せ。グラフの縦軸には目盛と単位をつけること。

(2)　動き始めてから止まるまでにエレベーターが登った距離 h を求めよ。

(3)　エレベーターを引き上げるロープにかかる張力を，はじめの 10 秒間は F_1，次の 10 秒間は F_2，最後の 10 秒間は F_3 とする。F_1，F_2，F_3 を求めよ。

(4)　上昇し始めてから止まるまでにエレベーターのモーターが行った仕事量 W を求めよ。

(5)　エレベーターを１図のような速度で上昇させるためには，モーターの仕事率は最低どれほど必要か。kW の単位で答えよ。

(6)　エレベーター内の一定の高さからボールを静かにはなして落下させる。ボールがエレベーターの床に達するまでの時間を，上昇のはじめの 10 秒，次の 10 秒，最後の 10 秒の間に観測するとそれぞれ t_1，t_2，t_3 であった。またエレベーターが静止しているときには t_0 であった。t_0，t_1，t_2，t_3 の大小関係について説明せよ。このなかの最も長い時間は最も短い時間の何倍か。四捨五入して小数点以下１桁まで求めよ。

(7)　もう少し精確に速度変化を観測すると２図のようであった。
$t=0$ s，10 s，20 s，30 s の付近の差異に注目せよ。この場合の加速度の時間変化を概略でよいから(1)の要領でグラフに表せ。

$\boxed{\text{解答}}$ (1)　下図 (a)　　(2)　2.0×10^2 m

(3)　$F_1=2.2\times10^4$ N，$F_2=2.0\times10^4$ N，$F_3=1.8\times10^4$ N

(4)　3.9×10^6 J　　(5)　2.2×10^2 kW　　(6)　1.1 倍　　(7)　下図 (b)

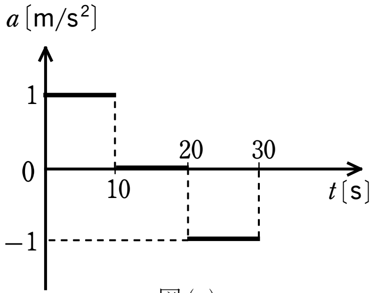


図 (a)

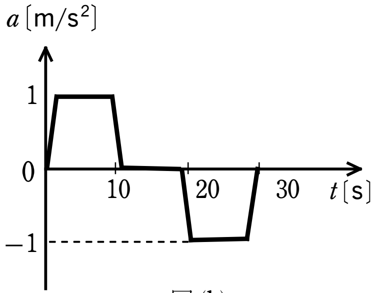
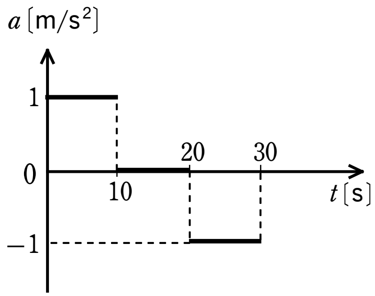


図 (b)

解説

(1)　v-t グラフの傾きが加速度 a〔m/s²〕を表す。
右図。



(2)　グラフの t 軸で囲む面積を求める。

$$h=\frac{(10+30)\times 10}{2}=\mathbf{2.0\times 10^2}\ \text{(m)}$$

(3)　$F_1=2000\times 9.8+2000\times 1.0$
$=2.16\times 10^4 \fallingdotseq \mathbf{2.2\times 10^4}$ (N)

$F_2=2000\times 9.8=1.96\times 10^4 \fallingdotseq \mathbf{2.0\times 10^4}$ (N)

$F_3=2000\times 9.8-2000\times 1.0$
$=1.76\times 10^4 \fallingdotseq \mathbf{1.8\times 10^4}$ (N)

(4)　モーターのした仕事は重力による位置エネルギーの増加に等しい。

$$W=2000\times 9.8\times 200=3.92\times 10^6 \fallingdotseq \mathbf{3.9\times 10^6}\ \text{(J)}$$

(5)　10 秒直前の仕事率が最高であるから

$$2.16\times 10^4\times 10=2.16\times 10^5\ \text{(W)} \fallingdotseq \mathbf{2.2\times 10^2}\ \text{(kW)}$$

(6)　エレベーター内での落下の加速度はそれぞれ

0 s〜10 s：$\alpha_1=9.8+1.0=10.8$ (m/s²)

10 s〜20 s：$\alpha_2=9.8$ (m/s²)，静止のときも 9.8 m/s²

20 s〜30 s：$\alpha_3=9.8-1.0=8.8$ (m/s²)

落下時間は加速度の平方根に反比例するから $t_1<t_2=t_0<t_3$

$$l=\frac{1}{2}\alpha t^2=\frac{1}{2}\times 10.8\times {t_1}^2=\frac{1}{2}\times 8.8\times {t_3}^2 \qquad \text{ゆえに}\quad \frac{t_3}{t_1}=\sqrt{\frac{10.8}{8.8}}=\mathbf{1.1}\ (\text{倍})$$

(7)　0 s，10 s，20 s，30 s 付近の曲線の種類が不明であるが，傾きの増加率が一定であるとすると 右図のようになる。