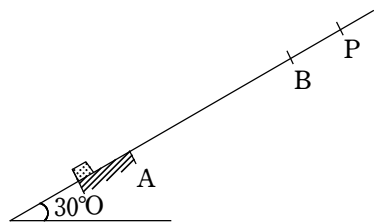


1.

水平面とのなす角が 30° の斜面上で静止している質量 2.0 kg の物体に、原点 O から点 A まで、斜面に平行に 39.2 N の力を加え続け、物体を加速させた。物体は点 A から速さ 19.6 m/s で斜面上を上向きにすべり始め、最高点 P に達した後、斜面を下向きにすべって点 B を通過した。OA 間はあらい斜面、AP 間は摩擦が無視できるなめらかな斜面で、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 として、次の問いに答えよ。ただし、答えは小数点以下第 1 位まで求めることとする。



- (1) 物体にはたらく垂直抗力、および OA 間における動摩擦力の大きさを求めよ。ただし、OA 間の動摩擦係数は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ とする。なお、 $\sqrt{3} = 1.73$ とせよ。
- (2) OA 間における物体の加速度の大きさと向き、および加速に要した時間を求めよ。
- (3) AP 間における物体の加速度の大きさと向き、および点 A から点 P に達するまでに要した時間を求めよ。
- (4) 点 P に達した後、物体は斜面をすべり落ちて、点 A からの距離が 29.4 m の点 B を下向きに通過した。物体が点 A から点 P を経由して点 B に達するまでに要した時間を求めよ。

- 解答**
- (1) 垂直抗力 : 17.0 N 動摩擦力 : 9.8 N
 - (2) 大きさ : 9.8 m/s^2 向き : 点 O から点 A の向き 時間 : 2.0 s
 - (3) 大きさ : 4.9 m/s^2 向き : 点 P から点 A の向き 時間 : 4.0 s
 - (4) 6.0 s

解説

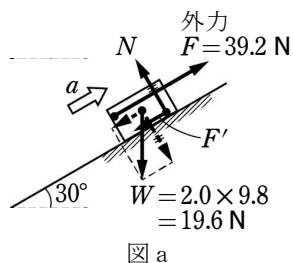
- (1) OA 間の斜面を上向きにすべっているときの、物体にはたらく力について図示すると図 a のようになる。斜面に垂直な向きにおける力のつりあいより、垂直抗力の大きさを N 、重力の大きさを W とすると

$$N - W \cos 30^\circ = 0$$

$$\text{よって } N = 2.0 \times 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.8\sqrt{3}$$

$$\approx 17.0 \text{ N}$$

また、動摩擦力は「 $F' = \mu' N$ 」より



$$F' = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 9.8\sqrt{3} = 9.8 \text{ N} \quad (\text{点 A から点 O の向き})$$

- (2) 運動方程式「 $ma = F$ 」を、斜面上向きを正の向きとして立式すると

$$2.0a = 39.2 - W \sin 30^\circ - F'$$

$$2a = 39.2 - 9.8 - 9.8$$

$$a = 9.8 \text{ m/s}^2$$

よって、大きさは 9.8 m/s^2 、点 O から点 A の向き

また、点 A での速さが 19.6 m/s であることから、等加速度直線運動の式「 $v = v_0 + at$ 」

より、OA 間で要した時間 t_0 は

$$t_0 = \frac{v - v_0}{a} = \frac{19.6}{9.8} = 2.0 \text{ s}$$

- (3) AP 間をすべっているときの物体にはたらく力は、図 a において外力と動摩擦力を除いたものになる。(2) と同様に運動方程式を立式すると

$$2.0a = -W \sin 30^\circ$$

$$2a = -9.8$$

$$a = -4.9 \text{ m/s}^2$$

よって、大きさは 4.9 m/s^2 、点 P から点 A の向き

また、AP 間で要した時間 t_1 についても同様に考えて

$$t_1 = \frac{0 - 19.6}{-4.9} = 4.0 \text{ s}$$

- (4) 等加速度直線運動の式「 $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ 」より、求める時間を t_2 として

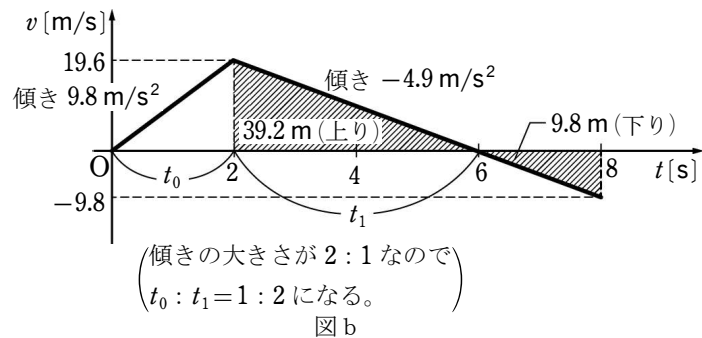
$$29.4 = 19.6 t_2 + \frac{1}{2} (-4.9) t_2^2$$

$$t_2^2 - 8 t_2 + 12 = 0$$

$$(t_2 - 2)(t_2 - 6) = 0$$

ここで、 $t_2 > t_1$ だから、 $t_2 = 6.0 \text{ s}$

参考 一連の運動を $v-t$ 図に表すと、図 b のようになる。



2.

図1のように、水平面からの角度 θ をもつ斜面がある。斜面と水平面は十分狭い接続部を介してなめらかに接続されている。斜面と水平面上に、互いに平行な2本の細いパイプが、接続部と直交するように設けられている。大きさが無視できる質量 m の2つの小物体1と2が、なめらかに動く滑車にか

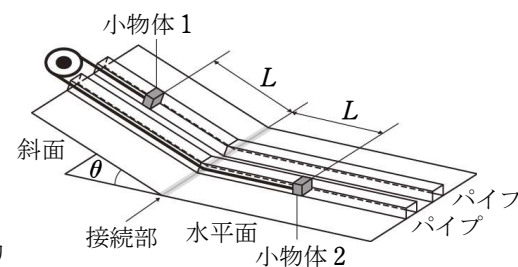


図1

けられたひもで連結されている。滑車とひもの質量は無視できるものとする。小物体1と2は、水平面と斜面に設けられたパイプ内を運動し、水平面と斜面との接続部をなめらかに通過できる。また、ひもは常にパイプと平行でたるむことはなく、ひもとパイプとの摩擦は無視できるものとする。そのため、ひもが2つの小物体を引く力(張力)の大きさは等しくなっている。初め、ひもを張った状態で、小物体1を斜面上のパイプ内で接続部から距離 L の位置、小物体2を水平面上のパイプ内で接続部から距離 L の位置に置き、静かにはなしたところ、小物体1は斜面から水平面側へ、小物体2はそれとは逆方向に、初速度の大きさ0で動き始めた。重力加速度の大きさを g として、次の(1)~(11)の問いに答えよ。

[A] まず、2つの小物体とパイプとの間の摩擦がない場合を考えよう。

小物体1が斜面を下り、小物体2が水平面上を移動するときの運動を考える。このときのひもの張力の大きさを T とする。

(1) 次の文章の空欄に当てはまる式を、 m, g, θ, T のうち必要なものを用いて表せ。

小物体1に作用する力のうち、パイプにそった方向の成分をもつのは重力と張力である。これらの力の合力のパイプにそった成分の大きさは ア である。また、小物体2に作用する力のうち、パイプにそった方向の成分をもつのは張力であり、その張力のパイプにそった成分の大きさは イ である。ひもで連結された2つの小物体は、同じ大きさの加速度で運動する。その加速度の大きさを a とすると、小物体1と2の運動方程式より、次の関係が成りたつ。

$$\text{小物体 1 : } ma = \text{ ア }$$

$$\text{小物体 2 : } ma = \text{ イ }$$

(2) 加速度の大きさ a と張力の大きさ T を求め、 m, g, θ のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 小物体1と2が運動を開始してから距離 L 移動し、接続部を通過するまでの時間 t_L を、 L, g, θ を用いて表せ。

(4) 小物体1と2が接続部を通過する瞬間の、それらの速さ V_L を、 L 、 g 、 θ を用いて表せ。

(5) 次の文章の空欄に当てはまる式を、 m 、 g 、 θ 、 L を用いて表せ。ただし、重力による位置エネルギーの基準面は水平面にとる。

小物体1と2の力学的エネルギーの和は、2つの小物体が運動を開始したときには \square ウ \square エ \square である。

2つの小物体の運動を、グラフに図示してみよう。ただし、2つの小物体が動き始めた時刻を $t=0$ とし、グラフにおいて、 t_L と V_L は(3)、(4)で求めた量である。

(6) $0 \leq t < t_L$ 、および $t_L < t < 2t_L$ の範囲で、時刻 t と、小物体1の速さとの関係を、図2のグラフに示せ。

(7) $0 \leq t < t_L$ 、および $t_L < t < 2t_L$ の範囲で、時刻 t と、小物体1のパイプにそった移動距離との関係を、図3のグラフに示せ。なお、グラフの縦軸の L は、図中の L に対応する。

(8) $0 \leq t \leq t_L$ 、および $t_L < t \leq 2t_L$ の範囲で、時刻 t と、ひもの張力の大きさとの関係を、図4のグラフに示せ。なお、グラフ中に●(黒丸印)で示す点は、時刻 $t=0$ での張力の大きさを表すものとする。

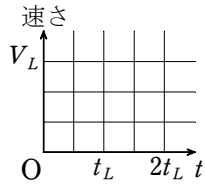


図2

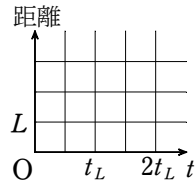


図3

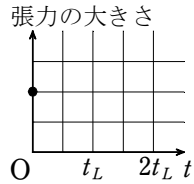


図4

[B] 次に、パイプ内の下の面と小物体との間に摩擦力がはたらく場合を考えよう。パイプ内の下の面と小物体との間の動摩擦係数を μ' とする。ひもを張った状態で、小物体1を斜面上のパイプ内で接続部から距離 L の位置、小物体2を水平面上のパイプ内で接続部から距離 L の位置に置き、静かにはなしたところ、小物体は初速度の大きさ0で動き始めた。

(9) 小物体1が斜面を下っているときの、2つの小物体の加速度の大きさを g 、 θ 、 μ' を用いて表せ。

(10) 2つの小物体が、運動を開始してから接続部を通過するまでの時間を g 、 θ 、 L 、 μ' を用いて表せ。

(11) 次の文章の空欄に当てはまる式を、 m 、 g 、 θ 、 L 、 μ' のうち、必要なものを用いて表せ。ただし、重力による位置エネルギーの基準面は水平面にとる。

小物体1と2が運動を開始してから接続部を通過するまでに、それぞれが摩擦

からされた仕事の和の大きさは \square オ \square である。2つの小物体が接続部を通過するときの、それぞれの力学的エネルギーの和は \square カ \square となる。

【解答】 [A] (1) (ア) $mg\sin\theta - T$ (イ) T

(2) $a = \frac{1}{2}g\sin\theta$ 、 $T = \frac{1}{2}mg\sin\theta$

(3) $2\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$ (4) $\sqrt{gL\sin\theta}$

(5) (ウ) $mgL\sin\theta$ (エ) $mgL\sin\theta$

(6) 図 i (7) 図 ii (8) 図 iii

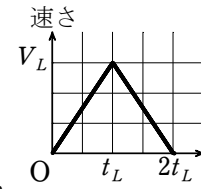


図 i

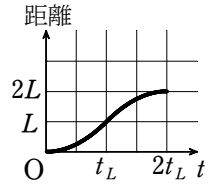


図 ii

[B] (9) $\frac{g}{2}(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)$

(10) $2\sqrt{\frac{L}{g(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)}}$

(11) (オ) $\mu'mgL(1 + \cos\theta)$

(カ) $mgL(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)$

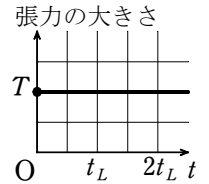


図 iii

【解説】

[A] 摩擦がない場合

(1) (ア) 小物体1にはたらく力は図aのようになり、合力は斜面下向きに

$$mg\sin\theta - T$$

(イ) 小物体2には左向きに張力がはたらく、その成分は T

運動方程式は、それぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta - T & \dots\dots ① \\ ma = T & \dots\dots ② \end{cases}$$

(2) ①式+②式より $a = \frac{1}{2}g\sin\theta$

a の値を②式に代入して $T = \frac{1}{2}mg\sin\theta$

(3) 「 $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ 」より $L = 0 + \frac{1}{2}at_L^2$

よって $t_L = \sqrt{\frac{2L}{a}} = 2\sqrt{\frac{L}{g\sin\theta}}$

(4) 「 $v = v_0 + at$ 」より $V_L = 0 + at_L = \sqrt{gL\sin\theta}$

(5) (ウ) 小物体1の重力による位置エネルギーより

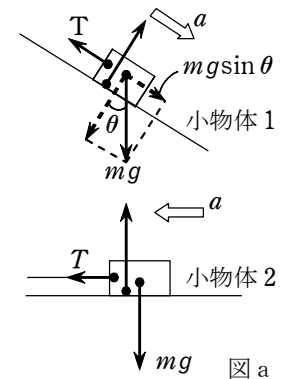


図 a

$mgL\sin\theta$

(エ) 運動を開始したときと、接続部を通過したときで力学的エネルギーが保存するから

$mgL\sin\theta$

(6) t_L 後、各小物体の運動方程式

は、図 b より

$$\begin{cases} ma' = -T' \\ ma' = T' - mg\sin\theta \end{cases}$$

であるから

$$\begin{cases} a' = -\frac{1}{2}g\sin\theta \\ T' = \frac{1}{2}mg\sin\theta \end{cases}$$

小物体 1 は、時刻 t_L で V_L の速

さとなり、その後は加速度 $a' = -a = -\frac{1}{2}g\sin\theta$ で減速していく。よって、答えは

図 c のようになる。

(7) 時刻 t_L までは (3) で求めたとおりに進む。その後は、加速度の大きさは同じで、向きが運動の向きとは逆になるので、減速しながら t_L 間に距離 L だけ進む。よってグラフは図 d のようになる。

(8) 張力 T は、(6) で求めたとおり t_L 以降も同じ大きさである。よって、図 e のようになる。

[B] 摩擦がある場合

(9) 斜面上の小物体 1 にはたらく動摩擦力の大きさ F' は、図 f と「 $F' = \mu'N$ 」より

$$F' = \mu'N = \mu'mg\cos\theta$$

水平面上の小物体 2 にはたらく動摩擦力は、同様に $\mu'mg$ である。小物体 1, 2 の運動方程式は、

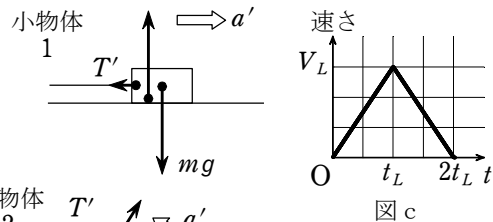


図 b

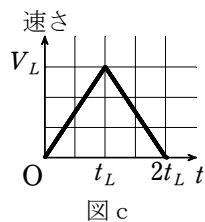


図 c

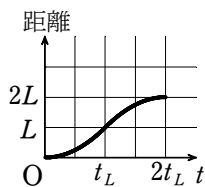


図 d

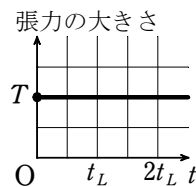


図 e

加速度の大きさを a_2 、張力の大きさを T_2 として

$$\begin{cases} ma_2 = mg\sin\theta - T_2 - \mu'mg\cos\theta & \dots\dots ③ \\ ma_2 = T_2 - \mu'mg & \dots\dots ④ \end{cases}$$

③式+④式より

$$2ma_2 = mg(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)$$

$$\text{よって } a_2 = \frac{g}{2}(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)$$

(10) 等加速度運動の式「 $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ 」より、

求める時間を t_2 として

$$L = 0 + \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

よって

$$t_2 = \sqrt{\frac{2L}{a_2}} = 2\sqrt{\frac{L}{g(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)}}$$

(11) (オ) 物体の運動の向きを正とする。図 f のような大きさの動摩擦力で L 移動したのだから、各小物体がされた仕事は

$$\text{小物体 1 : } -\mu'mg\cos\theta \cdot L = -\mu'mgL\cos\theta$$

$$\text{小物体 2 : } -\mu'mgL$$

よって、求める仕事の和は

$$-\mu'mgL(1 + \cos\theta)$$

求めるのは大きさだから、答えは

$$\mu'mgL(1 + \cos\theta)$$

(カ) 小物体 1 のもっていた重力による位置エネルギーが動摩擦力による仕事によって減少したから

$$mgL\sin\theta - \mu'mgL(1 + \cos\theta) = mgL(\sin\theta - \mu' - \mu'\cos\theta)$$

【参考】 これは、接続部を通過するときの小物体 1 と 2 の運動エネルギーの和と一致する。

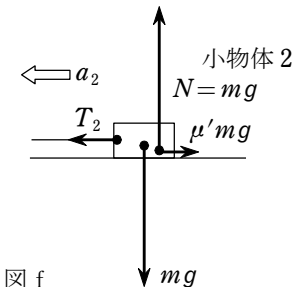
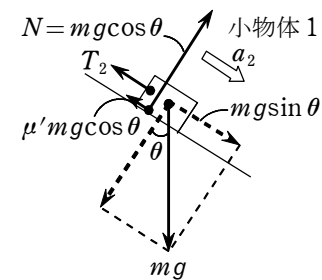


図 f