1．

図1に示すように，水平面から θ だけ傾いた斜面上に，質量 m の物体を置いたが，すべり落ちなかった。ただし，静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とする。静止摩擦係数と動摩擦係数は，それぞれ，2物体がたがいに平らな面を接触させて相対的に運動をする際，動きはじめるときと，動いているときに物体間にはたらく摩擦力の大きさの，2物体間の接触面に関する垂直抗力に対する比である。

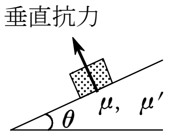

図1

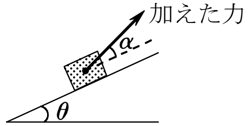

図2

(1)　物体が斜面から受ける垂直抗力を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。

(2)　すべり落ちないために傾斜角 θ の満たすべき条件を書け。

(3)　斜面に平行，上向きに力を加え，物体を引き上げようとした。しだいに力を強くしていったところ，あるところで物体が動きはじめた。そのときの力の大きさはいくらか。

(4)　同様に斜面に平行，下向きに力を加え，物体を引き下げようとした。物体が動きはじめたときの力の大きさはいくらか。

(5)　図2に示すように，物体の重心に上向きの力を加え，引き上げようとした。加えた力の方向と斜面とのなす角は α であった。物体が斜面にそって上向きに動きはじめたときの力の大きさはいくらか。ただし，この操作で，物体は斜面から浮き上がることはなかったものとする。

こんどは，図3に示すように，物体の重心に斜面の等高線に平行な横向きの力を加えた。このときの物体の斜面上の運動を調べよう。

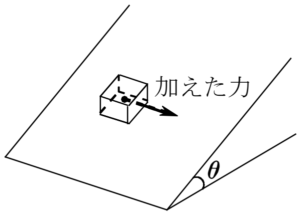

図3

(6)　動きはじめたときの，加えた力の大きさはいくらか。

(7)　上記(6)で動きはじめるときの力を物体の重心に加え続ける。物体が動きだした瞬間に摩擦係数が静止摩擦係数から動摩擦係数に変わるとして，物体の運動する方向はどうなるか。運動方向と等高線とのなす角の正接(タンジェント)の大きさを書け。

(8)　加えた力をそのまま持続するとき，加えた瞬間から時間が t だけ経過した間に物体が斜面上を進んだ距離はいくらか。

解答　(1)　$mg\cos\theta$　　(2)　$\tan\theta \leqq \mu$　　(3)　$mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)$

(4)　$mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)$　　(5)　$\dfrac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}mg$

(6)　$mg\sqrt{\mu^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}$　　(7)　$\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\mu^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}}$

(8)　$\dfrac{1}{2}(\mu - \mu')g\cos\theta \cdot t^2$

解説

静止摩擦力は f とおき，力のつりあいの関係からその大きさを求める。そして，動きはじめる直前に最大摩擦力 μN となる。(6)では，斜面に平行な平面上での力のつりあいを考える。

(1)　垂直抗力を N とおく。斜面に垂直な方向の力のつりあいより

$\boldsymbol{N = mg\cos\theta}$

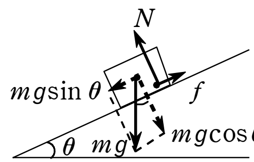

図 a

(2)　静止摩擦力を f とおく。斜面方向の力のつりあいより

$f = mg\sin\theta$

すべり落ちないためには　$f \leqq \mu N$　であればよいから

$mg\sin\theta \leqq \mu \cdot mg\cos\theta$

よって　$\boldsymbol{\tan\theta \leqq \mu}$

(3)　加えた力を f_1 とし，動きはじめる直前の摩擦力が μN となることを考え，力のつりあいを求める。　$f_1 - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = 0$

よって　$f_1 = \boldsymbol{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}$

(4)　求める力を f_2 として，力のつりあいを求める。

$f_2 + mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = 0$

よって　$f_2 = \boldsymbol{mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)}$

(5)　加えた力を F とする。動きはじめる直前の摩擦力が μN となることを考え

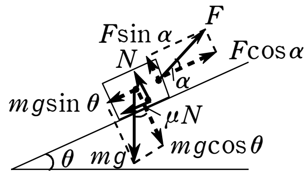

図 b

斜面に垂直な方向の力のつりあいは

$N + F\sin\alpha - mg\cos\theta = 0$

斜面方向の力のつりあいは

$F\cos\alpha - mg\sin\theta - \mu N = 0$

以上2式より

$F\cos\alpha = mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta - \mu F\sin\alpha$

$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)$

よって　$F = \boldsymbol{\dfrac{\sin\theta + \mu\cos\theta}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}mg}$

(6)　加えた力を F とおく。等高線に平行な力であるから垂直抗力 N は $mg\cos\theta$ であり，動きはじめる直前の静止摩擦力は最大摩擦力 μN である。

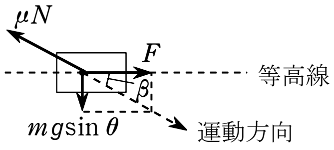

図 c

斜面にそった力を示すと，図 c のように，重力の斜面方向の成分 $mg\sin\theta$，加えた力 F と摩擦力 μN であり，それらの 3 力がつりあっているから，三平方の定理より

$$(\mu N)^2 = F^2 + (mg\sin\theta)^2$$

よって　$F^2 = (\mu\cdot mg\cos\theta)^2 - (mg\sin\theta)^2$

ゆえに　$F = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

(7)　運動方向と等高線のなす角を β とすると

$$\tan\beta = \frac{mg\sin\theta}{F} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\mu^2\cos^2\theta - \sin^2\theta}}$$

(8)　運動方向の加速度を a として，運動方程式を立てると

$$ma = \sqrt{F^2 + (mg\sin\theta)^2} - \mu' N$$

(6) の関係を用いると

$$ma = \mu mg\cos\theta - \mu' mg\cos\theta$$

よって　$a = (\mu - \mu')g\cos\theta$

ゆえに，求める距離は「$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$」より

$$x = \frac{1}{2}(\mu - \mu')g\cos\theta\cdot t^2$$

２．

図 1 のように，平らな板に電磁石を取り付けた物体 A と，磁石に引きつけられる素材でできた平らな板 B が，水平な床の上に重ねて置いてある。A および B の質量はそれぞれ m および M とする。B は A よりも十分大きく，A は B の上から落ちずに運動する。また，

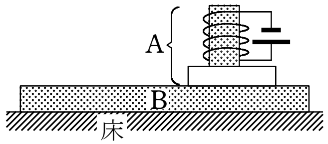

図 1

電磁石に電流を流すと，A と B の間に鉛直方向に大きさ W ($W>0$) の磁気力 (引力) がはたらく。W は電磁石に流れる電流の大きさを変えることにより変化させることができる。A と B との間，および B と床との間の静止摩擦係数はともに μ，動摩擦係数はともに μ' である。

時刻 $t=0$ に B を静止させた状態で，A に水平方向に初速度 v を与え，A が床に対して静止するまでの間の，A と B の運動のようすを調べた。その結果，W がある値 W_1 よりも大きいか小さいかによって，次の 2 種類の運動が観測された。

運動Ⅰ：$W<W_1$ のとき，B は床に対して静止したまま，A のみが B の上を運動して，ある時間の後に静止した。

運動Ⅱ：$W>W_1$ のとき，A が運動を始めた直後に B も床に対して運動を始めた。その後，A と B の速度差 Δv は，時間の経過とともに小さくなり，$t=t_1$ のときに $\Delta v=0$ になった。$t=t_1$ 以降，A と B は $\Delta v=0$ の状態で運動し，$t=t_2$ のときに床に対して静止した。

いずれの場合も，A と B が運動する方向は，常に A の初速度の方向と平行であり，A も B も回転することはなかった。

重力加速度の大きさを g とし，空気による抵抗は無視できるものとして，以下の問いに答えよ。ただし，電磁石は B に対してのみ引力を及ぼし，床に対しては力を及ぼさないものとする。

(1)　B が A に及ぼす垂直抗力 N_1，および床が B に及ぼす垂直抗力 N_2 を，m，M，g，W を用いて表せ。

(2)　運動Ⅰの場合に，A が床に対して静止するまでに移動する距離 l を，v，W，m，μ'，g を用いて表せ。

(3)　W_1 を，m，M，μ，μ'，g を用いて表せ。

(4)　運動Ⅱの場合の t_1 を，v，W，M，m，μ' を用いて表せ。

(5)　運動Ⅱの場合の，$t_1<t<t_2$ における A の加速度 a (B の加速度と等しい) を，μ'，g を用いて表せ。ただし，A に与える初速度の向きを正の向きにとるものとする。

(6)　図２は，A および B の床に対する速度と t の関係をグラフに表したものである。図中の破線 PS は W が W_1 よりわずかに小さくて運動Ｉが起こった場合の A の速度を表している。また実線 PQ および OQ は，W が W_1 よりわずかに大きくて運動Ⅱが起こった場合の $0<t<t_1$ における A および B の速度をそれぞれ表している。

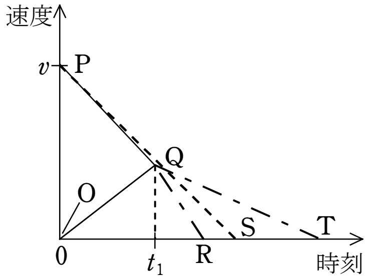

図２

(a)　運動Ⅱの場合の $t_1<t<t_2$ における A の速度を正しく表しているのは，図中の一点鎖線 QR と QT のどちらか，理由をつけて答えよ。

(b)　A が運動を始めてから静止するまでに床に対して移動する距離は，運動Ｉと運動Ⅱの場合でどちらが短いか，理由をつけて答えよ。ただし，運動Ｉと運動Ⅱの場合の W の差は非常に小さいので，$0<t<t_1$ における A の移動距離の差は無視できるものとする。図２の中の図形を指し示す必要がある場合には，図中の記号 O，P，Q，R，S，T を用いて，三角形 OPQ などと表すこと。

解答　(1) $N_1=mg+W$，$N_2=(m+M)g$　　(2) $\dfrac{mv^2}{2\mu'(mg+W)}$

(3) $\dfrac{\mu}{\mu'}(m+M)g-mg$　　(4) $\dfrac{Mmv}{\mu'(M+m)W}$　　(5) $-\mu' g$

(6)　(a)　問題の図２の v-t 図において，グラフの傾きは加速度を表す。PQ の傾きは (2) の結果より $a=-\mu'\left(g+\dfrac{W}{m}\right)$ であり，運動Ⅱの場合の $t_1<t<t_2$ における A の加速度は (5) の結果より $a'=-\mu' g$ なので，t_1 以降に A の加速度の大きさ (傾きの大きさ) が小さくなる。したがって，A の速度を正しく表しているのは QT である。

(b)　図２の v-t 図の，グラフと時間軸で囲まれる面積は移動距離を表している。運動Ｉの移動距離は，三角形 OPS の面積に，運動Ⅱの移動距離は，四角形 OPQT の面積にあたる。三角形 OPS よりも四角形 OPQT の面積のほうが 大きい。したがって，移動距離が短いのは運動Ｉである。

解説

床の上に物体 A をのせた平板 B を置き，床と B，B と A の間に摩擦力が生じている上に，力学には珍しい磁気力 W が A と B の間にはたらき，その W の大小により異なる運動がおこるという，非常に複雑な問題に見える。しかし，A と B にはたらく力をしっかりと認識，図示し，力のつりあいや運動方程式をつくるという基本的な手順を踏んでいけば，確実に解くことができる。

- 運動Ｉでは，A は運動し加速度が生じているが，B は床に対して静止しており加速度は 0 (力のつりあい) である。
- 運動Ⅱでは，はじめ A，B は異なる加速度で運動しているが，$t=t_1$ 以降は一体となり同じ加速度で運動する。

それぞれの運動を問題文からしっかりと読みとろう。

(1)　物体 A，板 B にはたらく力を図示すると図 a のようになる (f は A と B の間の摩擦力，F は床と B の間の摩擦力を示している)。

A，B の鉛直方向の力のつりあいより

A：$N_1-mg-W=0$　　　　…… ①

B：$N_2+W-Mg-N_1=0$　　…… ②

①，② 式を整理すると

$N_1=mg+W$　… ③，$N_2=(m+M)g$　… ④

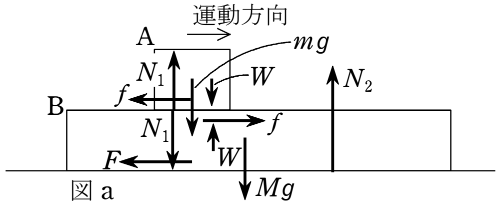

図 a

(2)　$W<W_1$ のとき (運動Ｉ)，A は B 上をすべるので，f は動摩擦力 ($\mu' N_1$) である。

③ 式を用いて

$f=\mu' N_1=\mu'(mg+W)$　…… ⑤

A の初速度 v の向きを正とし，A の加速度を a とおき，A の水平方向の運動方程式を立てる。

$ma=-f=-\mu'(mg+W)$

ゆえに　$a=-\mu'\left(g+\dfrac{W}{m}\right)$　　…… ⑥

等加速度運動の公式※A← より

$0^2-v^2=2\left\{-\mu'\left(g+\dfrac{W}{m}\right)\right\}l$

これより　$l=\dfrac{mv^2}{2\mu'(mg+W)}$　※B←

(3)　$W=W_1$ のとき，板 B が床の上をすべり始めるギリギリの状態で，B が床から受ける摩擦力 F は最大摩擦力 μN_2 になる。④ 式を用いて

$$F=\mu N_2=\mu(m+M)g \quad \cdots\cdots ⑦$$

B の水平方向の力のつりあいは，⑤ 式 $(W=W_1)$，⑦ 式を用いて

$$f-F=\mu'(mg+W_1)-\mu(m+M)g=0$$

式を整理すると

$$W_1=\boldsymbol{\frac{\mu}{\mu'}(m+M)g-mg}$$

(4)　$W>W_1$ のとき (運動 II)，A は B の上をすべり，B も床の上をすべる。A，B の加速度を a_{A}，a_{B} とする。A と B の間の摩擦力 f は ⑤ 式の動摩擦力，B と床の間の摩擦力 F も動摩擦力 $\mu' N_2$ である。④ 式を用いて

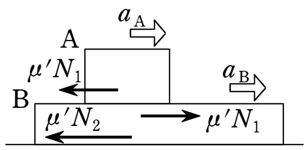

図 b

$$F=\mu' N_2=\mu'(m+M)g \quad \cdots\cdots ⑧$$

A の運動方程式は (2) と同じなので，⑥ 式より

$$a_{\mathrm{A}}=-\mu'\left(g+\frac{W}{m}\right) \quad \cdots\cdots ⑨$$

B の運動方程式は ⑤，⑧ 式を用いて

$$Ma_{\mathrm{B}}=f-F=\mu'(mg+W)-\mu'(m+M)g$$
$$=\mu'(W-Mg)$$

これより　$a_{\mathrm{B}}=\mu'\left(\dfrac{W}{M}-g\right)$ ……⑩

$t=t_1$ のとき A と B の速度が一致するので，等加速度直線運動の式※C← より

$v+a_{\mathrm{A}}t_1=a_{\mathrm{B}}t_1$

⑨，⑩ 式を用いて式を整理すると

$$t_1=\frac{v}{a_{\mathrm{B}}-a_{\mathrm{A}}}=\boldsymbol{\frac{Mmv}{\mu'(M+m)W}}$$ ※D←

(5)　$t_1<t<t_2$ のとき，A と B は一体になって運動する。一体となった AB に外部から水平方向にはたらく力は，床との間の動摩擦力 (⑧ 式) だけである (図 c)。一体となった AB の運動方程式を立てると

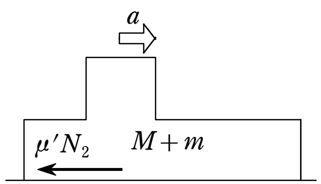

図 c

$$(M+m)a=-\mu' N_2=-\mu'(m+M)g$$

ゆえに　$a=\boldsymbol{-\mu' g}$ ……⑪

(6)　(a)　図 2 の v-t グラフの傾きは加速度を表す。PQ $(0\leqq t\leqq t_1)$ の傾きは (2) の結果 (⑥ 式) より，$a=-\mu'\left(g+\dfrac{W}{m}\right)$ である。運動IIの場合の $t_1<t<t_2$ における A の加速度は，(5) の結果 (⑪ 式) より，$a=-\mu' g$ である。

$$\mu'\left(g+\frac{W}{m}\right)>\mu' g$$

なので，t_1 以降に A の加速度の大きさ (傾き) が小さくなる。したがって，正しいグラフは **QT** である。

(b)　図 2 の v-t 図のグラフと 2 軸に囲まれた面積は，A の移動距離を表す。これより運動 I の移動距離は，三角形 OPS の面積にあたる。

運動IIの移動距離は，四角形 OPQT の面積にあたる。

三角形 OPS の面積よりも四角形 OPQT の面積の方が大きいので，A の床に対する移動距離は，**運動 I** の方が短い。

←※A　$v^2-v_0{}^2=2ax$

←※B　別解　仕事とエネルギーの関係　$\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0{}^2=$仕事 より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}mv^2=-fl=-\mu'(mg+W)l$$

ゆえに　$l=\dfrac{mv^2}{2\mu'(mg+W)}$

←※C　$v=v_0+at$

A は初速度 v，加速度 a_{A} なので　$v_{\mathrm{A}}=v+a_{\mathrm{A}}t$

B は初速度 0，加速度 a_{B} なので　$v_{\mathrm{B}}=a_{\mathrm{B}}t$

←※D　別解　⑨，⑩ 式より，B に対する A の相対加速度 α は

$$\alpha=a_{\mathrm{A}}-a_{\mathrm{B}}=-\frac{\mu'(M+m)W}{Mm}$$

B に対する A の相対初速度は

$v-0=v$

である。$t=t_1$ に A と B の速度が等しくなるので，このときの相対速度は 0 になる。以上より

$0=v+\alpha t_1$

ゆえに　$t_1=-\dfrac{v}{\alpha}=\dfrac{Mmv}{\mu'(M+m)W}$