1．

図1のように水平に対して45°の角度をなす斜面上に質量 M の直角二等辺三角形の物体Aを斜辺の面が斜面と接するように置く。直角二等辺三角形の等しい2辺の長さを d とする。Aの上面に質量 m で大きさの無視できる小さな物体Bを置く。斜面上に原点Oをとり，水平右向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。はじめ，Aは上面が $y=0$ となる位置にあり，BはAの上面の右端，すなわち，$(x,\ y)=(d,\ 0)$ の位置にある。空気の抵抗および斜面とAの間の摩擦は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g とする。

Ⅰ　AとBの間の摩擦も無視できる場合に以下の問いに答えよ。

(1)　図1のようにAの右面に水平左向きに力 F を加えたところ，2つの物体は最初の位置に静止したままであった。F の大きさを求めよ。

(2)　力 F をとり除いたところ，AとBは運動を開始した。その後，BはA上面の左端に達した。この瞬間のBの y 座標を求めよ。

(3)　BがA上面の左端に達する直前のBの速さ v を求めよ。

Ⅱ　図2に示すようにA上面の点Pを境にして右側の表面があらく，この部分でのAとBの間の静止摩擦係数および動摩擦係数はそれぞれ μ，μ'（ただし $\mu>\mu'$）である。A上面の点Pより左側は，なめらかなままである。(1)と同様に，力 F を加えて両物体を静止させた。力 F をとり除いた後の両物体の運動について以下の問いに答えよ。

(4)　μ が十分に大きい場合，BはA上面をすべり出さず，両物体は一体となって斜面をすべりおりる。このときの両物体の x 方向の加速度 a_x と y 方向の加速度 a_y を求めよ。

(5)　μ がある値 μ_0 より大きければBはA上面をすべり出さず，小さければすべり出す。その値 μ_0 を求めよ。

(6)　μ が μ_0 より小さい場合に，Bが最初の位置 $(x,\ y)=(d,\ 0)$ からA上面の左端に達するまでの軌跡として最も適当なものを図3の(ア)〜(オ)の中から1つ選べ。ここで Q_1，Q_2，Q_3 はそれぞれ，Bの最初の位置，BがA上面の点Pに達した瞬間の位置，BがA上面の左端に達した瞬間の位置を表す。また破線は直線 $y=x$ を示す。

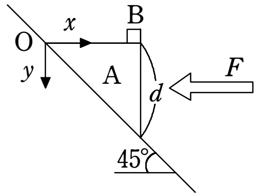


図1

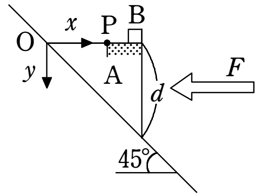
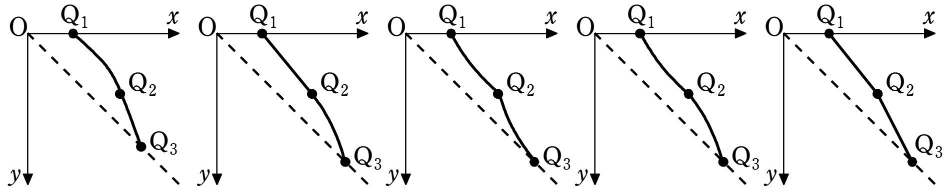


図2



(ア)　(イ)　(ウ)　(エ)　(オ)

図3

解答　(1)　$F=(M+m)g$　(2)　$y=d$　(3)　$v=\sqrt{\dfrac{2(M+m)gd}{2M+m}}$

(4)　$a_x=\dfrac{g}{2}$，$a_y=\dfrac{g}{2}$　(5)　$\mu_0=1$　(6)　(イ)

解説

物体の運動を考える際には，その物体にはたらく力を全て見つけ出し，図示することから始める。

Ⅰにおいて，物体Bには摩擦がないため水平方向には力がはたらかない。したがって，Bは鉛直下向きに運動する。また物体Aは45°の斜面に沿ってすべる。これより，Bが d だけ鉛直方向に移動したときの速度の大きさは，Aの速度の鉛直成分の大きさに等しい。このことから，力学的エネルギー保存の法則を用いて v を求めることができる（運動方程式を立ててもよい）。Ⅱにおいて，物体BがAの上をすべらない場合は，A，Bを一体として運動方程式を立てればよい。

(1)　A，B を一体と考えて，これにはたらく力 (重力 $(M+m)g$，垂直抗力 N，外力 F) のつりあいを考える (図 a)[※A←]。

斜面方向の力のつりあいより

$F\cos 45° = (M+m)g\sin 45°$　　ゆえに　$F = (M+m)g$

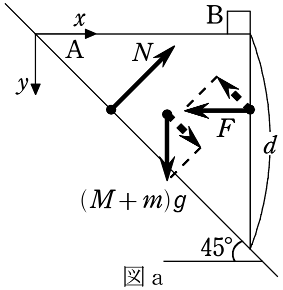


図 a

(2)　A と B との間の摩擦は無視できるので，B には水平方向の力がはたらかない。したがって，B は鉛直に降下する (図 b)。

B が A 上面の左端に達したときの y 座標は，図 b より　$y = d$

(3)　[※B←] B の鉛直下向き (y 方向) の速さが v になったときの A の速さを V とする。このとき B は A 上にあるので，B の y 方向の速さ v と A の y 方向の速度成分の大きさは等しい。

したがって

$V\sin 45° = v$　　ゆえに　$V = \sqrt{2}\,v$　…… ①

力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = (M+m)gd \quad \cdots\cdots ②$$

①，② 式より　$v = \sqrt{\dfrac{2(M+m)gd}{2M+m}}$

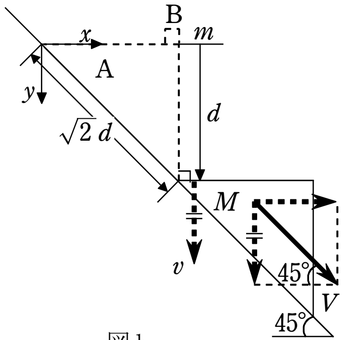


図 b

(4)　A と B を一体と考え，斜面方向の加速度を a (斜面方向下向き) とし (図 c)，斜面方向の運動方程式を立てると　$(M+m)a = (M+m)g\sin 45°$

ゆえに　$a = g\sin 45° = \dfrac{g}{\sqrt{2}}$

よって　$a_x = a\cos 45° = \dfrac{1}{2}g$，$a_y = a\sin 45° = \dfrac{1}{2}g$

…… ③

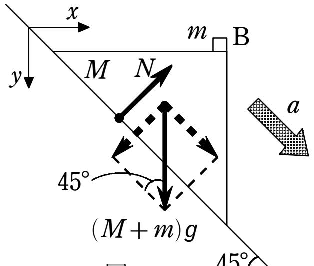


図 c

(5)　B が A から受ける垂直抗力を N'，摩擦力を f_0 とし，B の運動方程式を立てると (図 d)

$ma_x = f_0$　　　…… ④

$ma_y = mg - N'$　…… ⑤[※C←]

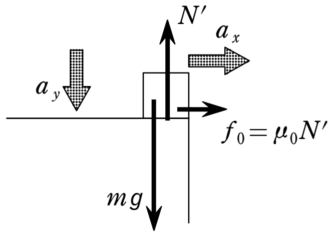


図 d

④，⑤ 式に ③ 式を代入すると

$$f_0 = \frac{1}{2}mg \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$N' = mg - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}mg \quad \cdots\cdots ⑦$$

B が A の上面ですべり出さないギリギリの状態において，摩擦力 f_0 は最大摩擦力になるので　$f_0 = \mu_0 N'$

⑥，⑦ 式を代入して　$\dfrac{1}{2}mg = \mu_0 \cdot \dfrac{1}{2}mg$　　ゆえに　$\mu_0 = 1$

(6)　点 P に達するまでの間，(4) で求めたように物体 B には，x 方向，y 方向ともそれぞれ一定の加速度が生じ，初速度 0 で等加速度運動をする。したがって Q_1，Q_2 間は直線になる。点 P を過ぎると，摩擦がなくなるため x 方向は等速運動になり，y 方向は引き続き等加速度運動をする[※D←]。したがって，Q_2Q_3 の軌跡は放物運動となる。これに 適するグラフは (イ) である。

←※A　別解　x 方向，y 方向それぞれの力のつりあいより

x 方向：$N\sin 45° = F$　　y 方向：$(M+m)g = N\cos 45°$

これより　$F = (M+m)g$

←※B　別解　B の鉛直下向きの加速度を β とすると，A の斜面下向きの加速度は $\sqrt{2}\,\beta$ である。B が A から受ける垂直抗力を R として，A，B の運動方程式を立てると

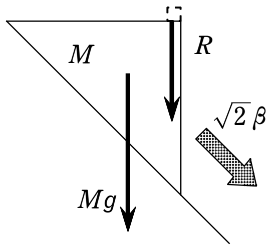
A (斜面方向)

$M(\sqrt{2}\,\beta) = (Mg+R)\sin 45°$　… ①

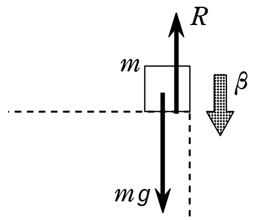
B (鉛直方向)

$m\beta = mg - R$　… ②

A



B



①×$\sqrt{2}$＋② より

$$(2M+m)\beta=(M+m)g$$

ゆえに　$\beta=\dfrac{M+m}{2M+m}g$

B は加速度 β で鉛直下方に距離 d 移動すると速さ v になる。

$v^2-v_0{}^2=2ax$ より

$$v^2-0^2=2\beta d$$

ゆえに　$v=\sqrt{\dfrac{2(M+m)gd}{2M+m}}$

←※C　④，⑤ 式は，a_x，a_y の加速度運動している A から見た，慣性力 (ma_x，ma_y) を考慮した力のつりあいの式と考えることもできる。

←※D　加速度の大きさは少し大きくなる。

２．

図 1，図 2 のそれぞれで，自然長 L，ばね定数 k の軽いばねの下端が水平な床に固定されている。ばねの上端には質量 m の台がとりつけられ，この台には質量 M のおもりがのっている。最初，おもりに鉛直下方の力を加えて，長さが $L-d$ になるまでばねを縮め，全体を静止させた。ただし，自然長 L は十分大きく，ばねは鉛直方向にのみ伸び縮みできるとし，重力加速度の大きさを g とする。

(1)　図 1 で，おもりから静かに力を取り除くと，おもりと台はしばらく一緒に上昇し，その後，おもりが台から離れた。こういうことが起きるための，最初のばねの縮み d の範囲を求めよう。

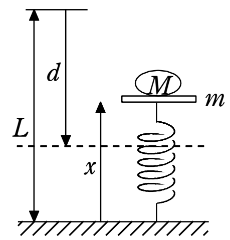


図 1

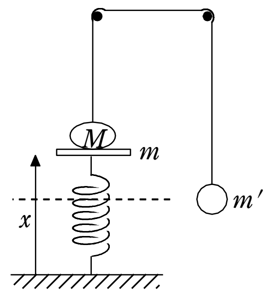


図 2

点線は，最初縮めたときの上端の高さを表す。

まず，おもりと台が一緒に動いている間で，ばねの長さが x となったときを考える。鉛直上向きを正として，両者共通の速度を v，加速度を a とし，両者の間にはたらく垂直抗力の大きさを N とする。おもりの運動方程式 $\boxed{\quad ア \quad}$ と台の運動方程式から N を消去すると，両者を一体と考えた場合の運動方程式：$(M+m)a=\boxed{\quad イ \quad}$　…… 式 (A)

が得られる。また，力学的エネルギー保存則を変形すると

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2=\frac{1}{2}k(x-L+d)\left\{\boxed{\quad ウ \quad}\right\}\quad \cdots\cdots \text{式 (B)}$$

となる。

おもりが台から離れるときは，$N=\boxed{\quad エ \quad}$ となる。(ア) と 式 (A) によると，それは $x=\boxed{\quad オ \quad}$ のときである。したがって式 (B) を考えると，$d>\boxed{\quad カ \quad}$ であったことがわかる。

(2)　図 2 では，軽く伸び縮みしない糸を台上のおもりにつなぎ，鉛直上方に伸ばして，十分高い位置で固定された 2 つのなめらかな支点にかけて質量 m' の分銅につないである。ただし，$m'<M$ とする。

おもりから静かに力を取り除くと，おもりと台はしばらく一緒に上昇し，その後，おもりが台から離れた。この間，糸がゆるむことはなかった。

おもりと台が，一緒に動いている間の運動を考える。x，a，N を (1) の場合と同様に定義し，糸の張力を f として，おもり，台，分銅の運動方程式を導く。これらから

a と f を消去すると

$$N=\frac{1}{M+m+m'}\{\boxed{\text{キ}}\}\qquad \cdots\cdots 式(\mathrm{C})$$

となる。台が軽くて $m=0$ とおけるならば，おもりが台から離れるのは $x=\boxed{\text{オ}}$ のときであり，(1) の場合と一致する。そこで，以下では $m=0$ の場合を考える。運動方程式から f と N を消去すると，式 (A) と同様な

$$(M+m')a=\boxed{\text{ク}}\qquad \cdots\cdots 式(\mathrm{D})$$

が得られる。式 (D) では，式 (A) の m が m' になり，さらに重力加速度の大きさ g が変更されているとみなすことができる。これらの対応関係を用いると，おもりが台から離れたことから $d>\boxed{\text{ケ}}$ であると容易にわかる。また，糸がたるまなかったことから $d<\boxed{\text{コ}}$ であるとわかる。

解答　(1) (ア)　$Ma=N-Mg$　　(イ)　$k(L-x)-(M+m)g$

(ウ)　$\left\{d+L-x-\dfrac{2(M+m)g}{k}\right\}$　　(エ)　0　　(オ)　L

(カ)　$\dfrac{2(M+m)g}{k}$

(2) (キ)　$\{k(L-x)(M+m')-2mm'g\}$

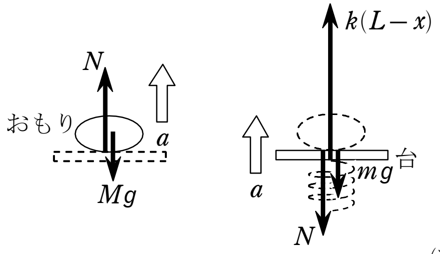
(ク)　$k(L-x)-(M-m')g$　　(ケ)　$\dfrac{2(M-m')}{k}g$　　(コ)　$\dfrac{2Mg}{k}$

解説

おもりを鉛直上方に打ち出す発射装置をイメージして考えるとよい。この場合のばねの弾性力は押しばねとしての利用なので鉛直上向きにはたらくことに注意する。

また連結物体として，連結の条件 (一体となって運動すること) をしっかりとらえ，各物体にはたらく力を図に描き，運動方程式を立てる。さらにはじめの状態と後の状態を仮定して，力学的エネルギーの保存を式に表し，設問にしたがって解いていけば，式の変形が面倒なところもあるが解答しやすいと思われる。とくに，ばねを含んでいるので，弾性力による位置エネルギー $\dfrac{1}{2}kx^2$ を用いる。ばねの自然長からの縮みが $L-x$ である点にも注意する。

(1) (ア)，(イ)　ばねの長さが x のとき，おもりと台にはたらく全ての力を図示すると次のようになる。



台にはたらく弾性力はフックの法則 ($F=kx$) より，$k(L-x)$。

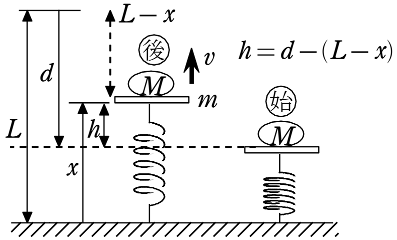
それぞれにはたらく垂直抗力は大きさは共通でともに N であるから，求める運動方程式は，

おもりについて　$Ma=N-Mg$　　$\cdots\cdots$ (ア)

台については　$ma=k(L-x)-mg-N$

この両式の和をとると　$(M+m)a=k(L-x)-(M+m)g$　　$\cdots\cdots$ (イ)

(ウ)　次に 2 物体を一体と考えて力学的エネルギーの保存を考える。最初に d だけ押し縮めた状態を基準に力学的エネルギーを調べると，



はじめは

$$\frac{1}{2}(M+m)\times 0^2+(M+m)g\times 0+\frac{1}{2}kd^2$$
$$=\frac{1}{2}kd^2$$

また後の状態 (ばねの長さが x) のとき

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+(M+m)g(x-L+d)+\frac{1}{2}k(L-x)^2$$

したがって，力学的エネルギー保存の法則より

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2+(M+m)g(x-L+d)+\frac{1}{2}k(L-x)^2=\frac{1}{2}kd^2$$

よって　$\dfrac{1}{2}(M+m)v^2=(x-L+d)\left\{\dfrac{1}{2}k(d+L-x)-(M+m)g\right\}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}(M+m)v^2=\dfrac{1}{2}k(x-L+d)\left\{d+L-x-\dfrac{2(M+m)g}{k}\right\}$

(エ)　おもりが台から離れる条件は，垂直抗力が 0 であるから，$N=0$

(オ)　(エ) を用いて，(ア) より　$Ma=-Mg$

よって $a=-g$ のときである。本文の式 (A) に代入すると　$k(L-x)=0$

つまり，$x=L$ を得る。

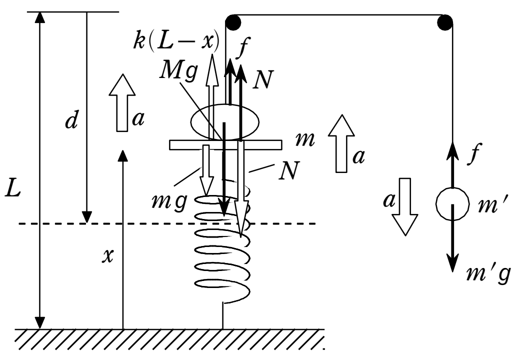
(カ)　おもりが台から離れていくとき，速さは正になっているはずなので，$v>0$。

これを本文の式 (B) に適用し，$x=L$ を代入すると，

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2=\frac{1}{2}kd\left\{d-\frac{2(M+m)g}{k}\right\}>0$$

k，d とも正なので　$d>\dfrac{2(M+m)g}{k}$

(2)　(1) と同様におもり，分銅，台にはたらく力を図に描き，それぞれの運動方程式を立てる。連結の条件よりおもりと台が加速度 a で上昇するとき，分銅は下向きに a で落下することになる。



(キ)　おもりについて　$Ma=N+f-Mg$　…①

分銅について　$m'a=m'g-f$　…②

台について　$ma=k(L-x)-mg-N$　…③

ここで ①+② より f を消去すると　$(M+m')a=N-(M-m')g$　…④

④×m より ③×$(M+m')$ を引くと

$$mN-m(M-m')g-k(L-x)(M+m')+(M+m')(N+mg)=0$$

よって　$(M+m+m')N+2mm'g-k(L-x)(M+m')=0$

よって　$N=\dfrac{1}{M+m+m'}\{k(L-x)(M+m')-2mm'g\}$

(ク)　(キ) の式に $m=0$ を代入すると

$$N=\frac{1}{M+m'}k(L-x)(M+m')=k(L-x)$$

したがって $N=0$ の条件で $x=L$ となる。$m=0$ であれば $N=k(L-x)$ なので，これを ④ 式へ代入すると，

$$(M+m')a=k(L-x)-(M-m')g \quad \cdots⑤$$

(ケ)　⑤ 式は本文の式 (A) と対比すると

$$(M+m')a=k(L-x)-(M+m')\frac{M-m'}{M+m'}g$$

したがって m が m' に，g が $\dfrac{M-m'}{M+m'}g$ に対応していることがわかる。そこで前問の (カ) と対比しておもりが台から離れる条件を表すと

$$d>\frac{2(M+m')}{k}\times\frac{M-m'}{M+m'}g$$

つまり　$d>\dfrac{2(M-m')}{k}g$

(コ)　今，一体となって運動しているときの張力 f を求めてみる。⑤ 式より

$$a=\frac{k(L-x)-(M-m')g}{M+m'}$$

これを ② へ代入して f を求めると

$$f=m'(g-a)$$

よって　$f=\dfrac{m'\{2Mg-k(L-x)\}}{M+m'}$

糸がたるまないためには $f>0$ なので

$$2Mg-k(L-x)>0$$

$$L-x<\frac{2Mg}{k}$$

よって　$x>L-\dfrac{2Mg}{k}$

x の最小値が $L-d$ であるから

$$L-d>L-\frac{2Mg}{k}$$

つまり　$d<\dfrac{2Mg}{k}$