1．

質量 M，長さ l の一様な剛体の棒 OQ がある。棒は，図1のように壁上の点 P で一端を固定された糸によって OQ の中点 R でつるされており，端点 O で壁に接している。壁と棒の間の静止摩擦係数を μ とし，重力加速度の大きさを g とする。

棒は壁に垂直に接し，棒と糸のなす角の大きさを θ ($0° < \theta < 90°$) とするとき，次の (1) と (2) に答えよ。

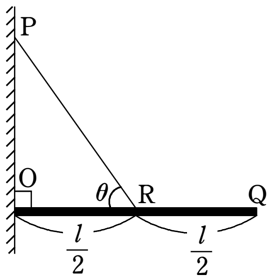


図1

(1)　点 R で作用する糸の張力の大きさを求め，次の中から正しいものを1つ選べ。

① 0　② $\dfrac{Mg}{2}$　③ Mg　④ $2Mg$

⑤ $\dfrac{Mg}{2\sin\theta}$　⑥ $\dfrac{Mg}{2\cos\theta}$　⑦ $\dfrac{Mg}{\sin\theta}$　⑧ $\dfrac{Mg}{\cos\theta}$

⑨ $Mg\sin\theta$　⑩ $Mg\cos\theta$　⑪ $2Mg\sin\theta$　⑫ $2Mg\cos\theta$

⑬ $\dfrac{Mgl}{2}$　⑭ $\dfrac{Mgl}{\sin\theta}$　⑮ $\dfrac{Mgl}{\cos\theta}$　⑯ $Mgl\cos\theta$

(2)　点 O で棒が壁から受ける垂直抗力の大きさを求め，次の中から正しいものを1つ選べ。

① 0　② $\dfrac{Mg}{2}$　③ $2Mg\sin\theta\cos\theta$　④ Mg

⑤ $\dfrac{Mg}{\tan\theta}$　⑥ $\dfrac{Mg}{2\tan\theta}$　⑦ $Mg\tan\theta$　⑧ $\dfrac{Mg\tan\theta}{2}$

⑨ $Mg\sin^2\theta$　⑩ $2Mg\sin^2\theta$　⑪ $2Mg\cos^2\theta$　⑫ $Mg\sin\theta\cos\theta$

⑬ $\dfrac{Mgl}{2}$　⑭ $\dfrac{Mgl}{\sin\theta}$　⑮ $\dfrac{Mgl}{\cos\theta}$　⑯ $Mgl\cos\theta$

次に図2のように，点 O から距離 x の棒上の点に質量 m のおもりを固定したところ，棒はそのまま静止していた。このとき，次の (3) と (4) に答えよ。

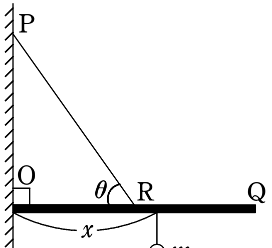


図2

(3)　点 O で棒が壁から受ける垂直抗力の大きさを求め，次の中から正しいものを1つ選べ。

① $\dfrac{2(Ml+mx)g}{l\sin\theta}$　② $\dfrac{2(Ml+mx)g}{l\cos\theta}$

③ $\dfrac{2(Ml+mx)g}{l\tan\theta}$　④ $\dfrac{(Ml+2mx)g}{l\sin\theta}$

⑤ $\dfrac{(Ml+2mx)g}{l\cos\theta}$　⑥ $\dfrac{(Ml+2mx)g}{l\tan\theta}$

⑦ $\dfrac{2(Ml+mx)g\sin\theta}{l}$　⑧ $\dfrac{2(Ml+mx)g\cos\theta}{l}$

⑨ $\dfrac{2(Ml+mx)g\tan\theta}{l}$　⑩ $\dfrac{(Ml+2mx)g\sin\theta}{l}$

⑪ $\dfrac{(Ml+2mx)g\cos\theta}{l}$　⑫ $\dfrac{(Ml+2mx)g\tan\theta}{l}$

(4)　棒が壁に対して動かないための x の条件は $\boxed{\text{ア}} \leqq x \leqq \boxed{\text{イ}}$ と表せる。$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ を求め，次の中から最もふさわしいものを1つずつ選べ。

ただし θ の値は，$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ が 0 以上 l 以下であるという条件を常に満たしているものとする。

$\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ 共通の選択肢：

① 0　② $\dfrac{l}{4}$　③ $\dfrac{l}{2}$　④ l

⑤ $\dfrac{lM\mu}{2m(\sin\theta-\mu)}$　⑥ $\dfrac{lM\mu}{2m(\cos\theta-\mu)}$　⑦ $\dfrac{lM\mu}{2m(\tan\theta-\mu)}$

⑧ $\dfrac{l\sin\theta}{2(\sin\theta+\mu)}$　⑨ $\dfrac{l\cos\theta}{2(\cos\theta+\mu)}$　⑩ $\dfrac{l\tan\theta}{2(\tan\theta+\mu)}$

⑪ $\dfrac{l(m\sin\theta-M\mu)}{2m(\sin\theta+\mu)}$　⑫ $\dfrac{l(m\cos\theta-M\mu)}{2m(\cos\theta+\mu)}$　⑬ $\dfrac{l(m\tan\theta-M\mu)}{2m(\tan\theta+\mu)}$

⑭ $\dfrac{l(m\sin\theta+M\mu)}{2m(\sin\theta-\mu)}$　⑮ $\dfrac{l(m\cos\theta+M\mu)}{2m(\cos\theta-\mu)}$　⑯ $\dfrac{l(m\tan\theta+M\mu)}{2m(\tan\theta-\mu)}$

次に，図3のように，おもりを RQ 上の点 S に固定し，棒が壁に接触する位置を変えて棒と水平面のなす角を 30° としたとき，糸と壁のなす角は 30° となり，棒は壁に対して静止していた。OS の長さを x とするとき，次の (5) と (6) に答えよ。

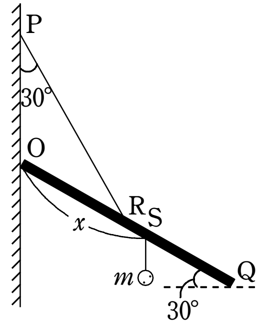


図3

(5)　点 O で棒が壁から受ける静止摩擦力の大きさを求め，次の中から正しいものを1つ選べ。

① $\dfrac{1}{2}Mg+\dfrac{3x}{l}mg$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg+\dfrac{3x}{l}mg$

③ $\dfrac{3}{2}Mg+\dfrac{3x}{l}mg$　④ $\dfrac{1}{2}Mg+\dfrac{\sqrt{3}\,x-l}{l}mg$

⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg+\dfrac{\sqrt{3}\,x-l}{l}mg$　⑥ $\dfrac{3}{2}Mg+\dfrac{\sqrt{3}\,x-l}{l}mg$

⑦ $\dfrac{1}{2}Mg+\dfrac{3x-l}{l}mg$　⑧ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg+\dfrac{3x-l}{l}mg$　⑨ $\dfrac{3}{2}Mg+\dfrac{3x-l}{l}mg$

⑩ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}Mg+\dfrac{\sqrt{3}\,x-l}{l}mg$　　⑪ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}Mg+\dfrac{\sqrt{3}\,x}{l}mg$

⑫ $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}Mg+\dfrac{\sqrt{3}\,x+l}{l}mg$　　⑬ $(\sqrt{3}-1)Mg+\dfrac{2\sqrt{3}\,x-l}{l}mg$

⑭ $(\sqrt{3}-1)Mg+\dfrac{2\sqrt{3}\,x}{l}mg$　　⑮ $(\sqrt{3}-1)Mg+\dfrac{2\sqrt{3}\,x+l}{l}mg$

(6)　おもりの位置を点 Q の向きに少しずつ変えたところ，ある位置 S′ のときに棒が壁に対して動き始めた。このときの OS′ の長さを求め，次の中から最もふさわしいものを 1 つ選べ。

① $\dfrac{\mu M+2m}{\sqrt{3}\,\mu m}l$　　② $\dfrac{\mu M+2m}{2\sqrt{3}\,\mu m}l$　　③ $\dfrac{\sqrt{3}\,\mu M+2m}{2\sqrt{3}\,\mu m}l$

④ $\dfrac{\sqrt{3}\,\mu M+2m}{2(3+\sqrt{3}\,\mu)m}l$　　⑤ $\dfrac{(\sqrt{3}\,\mu-1)M+2m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l$　　⑥ $\dfrac{(\sqrt{3}\,\mu+1)M+2m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l$

⑦ $\dfrac{\sqrt{3}\,\mu M+2(\sqrt{3}-1)m}{2(3+\sqrt{3}\,\mu)m}l$　　⑧ $\dfrac{(\sqrt{3}\,\mu-1)M+2(\sqrt{3}-1)m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l$

⑨ $\dfrac{(\sqrt{3}\,\mu+1)M+2(\sqrt{3}-1)m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l$　　⑩ $\dfrac{\sqrt{3}\,\mu M+2(\sqrt{3}+1)m}{2(3+\sqrt{3}\,\mu)m}l$

⑪ $\dfrac{(\sqrt{3}\,\mu-1)M+2(\sqrt{3}+1)m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l$　　⑫ $\dfrac{(\sqrt{3}\,\mu+1)M+2(\sqrt{3}+1)m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l$

解答　(1)　⑦　　(2)　⑤　　(3)　⑥　　(4)　(ア)　⑬　　(イ)　⑯　　(5)　⑦　　(6)　⑤

解説

(1)　棒にはたらく張力の大きさを T，垂直抗力の大きさを N，摩擦力の大きさを f として図示すると，図 a のようになる (注 参照)。力のモーメントの式「$M=F_{\perp}l$」を用いて，点 O のまわりの力のモーメントのつりあいの式を立てると

$$T\sin\theta\cdot\frac{l}{2}-Mg\cdot\frac{l}{2}=0 \qquad \cdots\cdots\text{(a)}$$

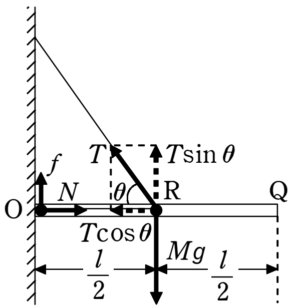


図 a

よって

$$T=\frac{Mg}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

注　(a) 式より　$T\sin\theta=Mg$

となるので，鉛直方向の力のつりあいから，この場合，摩擦力の大きさ $f=0$ である。

(2)　水平方向の力のつりあいの式は

$$N-T\cos\theta=0$$

これに (1) の答えを代入すると

$$N=\frac{Mg}{\sin\theta}\cos\theta=\frac{Mg}{\tan\theta} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

(3)　棒にはたらく力は図 b のようになる。

水平方向の力のつりあいの式は

$$N-T\cos\theta=0 \qquad \cdots\cdots\text{(b)}$$

点 O のまわりの力のモーメントのつりあいの式は

$$T\sin\theta\cdot\frac{l}{2}-Mg\cdot\frac{l}{2}-mg\cdot x=0 \qquad \cdots\cdots\text{(c)}$$

(c) 式より　$T=\dfrac{(Ml+2mx)g}{l\sin\theta}$　　……(d)

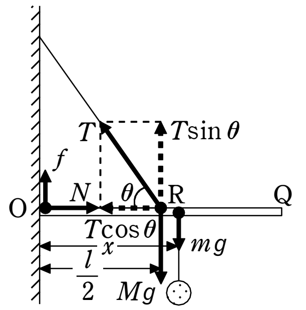


図 b

(d) 式を (b) 式に代入して

$$N=\frac{(Ml+2mx)g}{l\sin\theta}\cos\theta$$

$$=\frac{(Ml+2mx)g}{l\tan\theta} \quad \cdots\cdots ⑥ \qquad \cdots\cdots\text{(e)}$$

(4)(ア)　摩擦力の向きは図 b の向き ($f>0$) の場合と逆向き ($f<0$) の場合があるので，鉛直方向の力のつりあいの式は

$$T\sin\theta\pm f-Mg-mg=0 \qquad \cdots\cdots\text{(f)}$$

棒が壁に対して動かないためには，摩擦力の大きさ f が最大摩擦力をこえないことが必要である。すなわち最大摩擦力の式「$F_0=\mu N$」より

$$|f|\leqq\mu N \qquad \cdots\cdots\text{(g)}$$

ならすべらない。(f) 式を f について解き，(d) 式を代入すると

$$\pm f=(M+m)g-\frac{(Ml+2mx)g}{l\sin\theta}\sin\theta$$

$$=\frac{(l-2x)mg}{l} \qquad \cdots\cdots\text{(h)}$$

(g) 式に (e)，(h) 式を代入すると

$$\pm\frac{(l-2x)mg}{l}\leqq\mu\frac{(Ml+2mx)g}{l\tan\theta}$$

複号が ＋ の場合 (すなわち $l>2x$ の場合)，x についてまとめると

$$2mx(\tan\theta+\mu)\geqq l(m\tan\theta-M\mu)$$

よって　$x\geqq\dfrac{l(m\tan\theta-M\mu)}{2m(\tan\theta+\mu)}$　　……⑬

(イ)　複号が － の場合 (すなわち $l<2x$ の場合)，同様にして

$$-\frac{(l-2x)mg}{l}\leqq\mu\frac{(Ml+2mx)g}{l\tan\theta}$$

x についてまとめると

$$2mx(\tan\theta-\mu)\leqq l(m\tan\theta+M\mu)$$

よって　$x\leqq\dfrac{l(m\tan\theta+M\mu)}{2m(\tan\theta-\mu)}$　…… ⑯

(5)　棒にはたらく力を図示すると図 c となる。張力，重力をそれぞれ棒に垂直な成分と平行な成分に分解して考えると (図 d)，点 O のまわりの力のモーメントのつりあいの式は

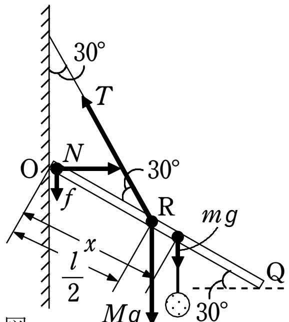


図 c

$$T\sin30°\cdot\frac{l}{2}-Mg\cos30°\cdot\frac{l}{2}-mg\cos30°\cdot x=0$$

よって

$$T=\sqrt{3}\,Mg+\frac{2\sqrt{3}\,x}{l}mg \qquad \cdots\cdots \text{(i)}$$

張力，重力をそれぞれ鉛直成分と水平成分に分解して考えると (図 e)，鉛直方向の力のつりあいの式は

$$T\sin60°-Mg-mg-f=0$$

ここに (i) 式を代入して整理すると

$$\left(\sqrt{3}\,Mg+\frac{2\sqrt{3}\,x}{l}mg\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=(M+m)g+f$$

よって

$$f=\frac{1}{2}Mg+\frac{3x-l}{l}mg \quad \cdots\cdots ⑦ \qquad \cdots\cdots \text{(j)}$$

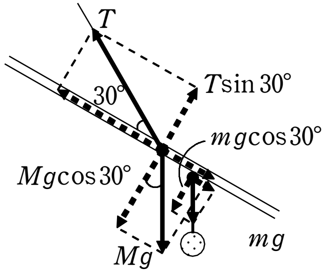


図 d

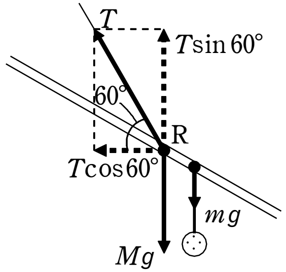


図 e

(6)　水平方向の力のつりあいの式は

$$N-T\cos60°=0$$

ここに (i) 式を代入すると

$$N=\left(\sqrt{3}\,Mg+\frac{2\sqrt{3}\,x}{l}mg\right)\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}Mg+\frac{\sqrt{3}\,x}{l}mg \qquad \cdots\cdots \text{(k)}$$

f が最大摩擦力の大きさ μN に達したとき，棒が壁に対して動き始めるので，(j)，(k) 式を $f=\mu N$ に代入して

$$\frac{1}{2}Mg+\frac{3x-l}{l}mg=\mu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Mg+\frac{\sqrt{3}\,x}{l}mg\right)$$

x について整理すると

$$\frac{3-\sqrt{3}\,\mu}{l}mx=\frac{(\sqrt{3}\,\mu-1)M+2m}{2}$$

よって

$$x=\frac{(\sqrt{3}\,\mu-1)M+2m}{2(3-\sqrt{3}\,\mu)m}l \quad \cdots\cdots ⑤$$

2．

図1に示すように，水平な床からなめらかで鉛直な壁に，質量 M，長さ l の一様な細い棒を立てかけた。棒は，鉛直方向を含み壁に垂直な平面内に常にあるものとし，棒の上端が横向きにすべることはないものとする。棒と壁との間には摩擦はない。棒と床との間の静止摩擦係数を μ，棒の傾きの角を θ，棒と壁との接点をA，棒と床との接点をBとする。重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。

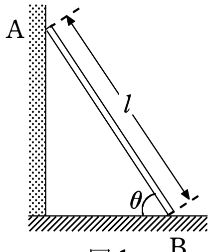


図1

(1) 棒がすべらずに静止しているとき，棒にはたらく，壁からの垂直抗力 N_A，床からの垂直抗力 N_B，床との摩擦力 F_B，重力 Mg を，作用点と向きに注意して図2に示せ。重力は棒の重心にはたらいているものとしてかくこと。

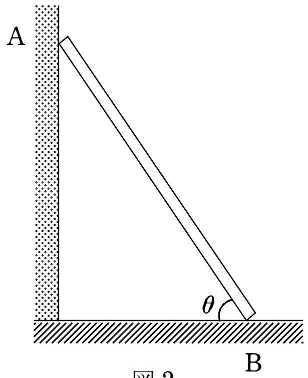


図2

(2) 棒がすべらずに静止しているための最小の傾きの角 θ_0 を次の手順で求めよ。

(a) 棒にはたらく力がつりあうことを式で表せ。

(b) 点Bのまわりの力のモーメントがつりあうことを式で表せ。

(c) 点Bでの摩擦力が最大摩擦力以下であることから，$\tan\theta_0$ を求めよ。

次に，図3のように，穴の開いた質量 m の大きさの無視できるおもりを棒に通し，長さ $x(0<x<l)$ の細いひもで棒の上端とつないで，壁に立てかけた。ひもは伸縮せず，質量は無視できる。棒はすべることなく静止しており，おもりと棒の間の摩擦は無視できるものとして，次の問いに答えよ。

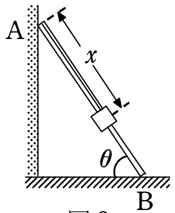


図3

(3) おもりにはたらくすべての力を，向きに注意して図4に示せ。また，それぞれの力の大きさを求めよ。

(4) 棒にはたらくすべての力を，作用点と向きに注意して図5に示せ。

(5) 棒がすべらずに静止しているための最小の傾きの角を θ_1 とする。$\tan\theta_1$ を(2)と同様の手順で求めよ。

(6) (5)で求めた θ_1 が，(2)で求めた θ_0 より小さくなるためには，ひもの長さ x をどのようにとればよいか。

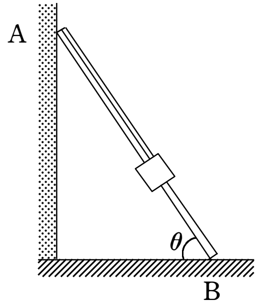


図4

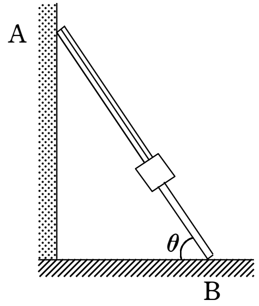


図5

解答 (1) 図a

(2) (a) 水平方向：$N_A-F_B=0$，

鉛直方向：$N_B-Mg=0$

(b) $Mg\cdot\dfrac{l}{2}\cos\theta-N_A\cdot l\sin\theta=0$

(c) $\dfrac{1}{2\mu}$

(3) 図b，

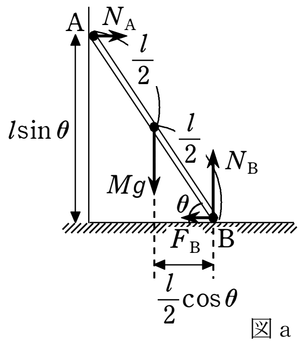
ひもの張力 $T=mg\sin\theta$

棒からの垂直抗力 $R=mg\cos\theta$

重力 mg

(4) 図cの太実線矢印

(5) $\dfrac{Ml+2m(l-x)}{2(M+m)\mu l}$　　(6) $\dfrac{l}{2}<x$



図a

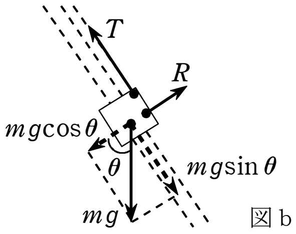


図 b

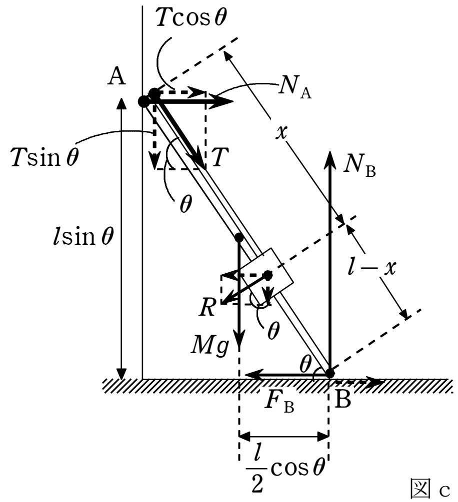


図 c

(解説)

(1)　棒にはたらく力は **図 a** のようになる。

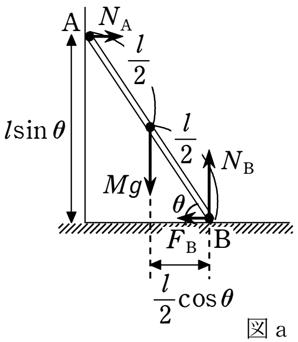


図 a

(2)　(a)　図 a より，水平方向の力のつりあいの式は

$$\boldsymbol{N_{\mathrm{A}}-F_{\mathrm{B}}=0} \qquad \cdots\cdots ①$$

鉛直方向の力のつりあいの式は

$$\boldsymbol{N_{\mathrm{B}}-Mg=0} \qquad \cdots\cdots ②$$

(b)　力のモーメントの式「$M=Fl_{\perp}$」より

$$\boldsymbol{Mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta-N_{\mathrm{A}}\cdot l\sin\theta=0} \qquad \cdots\cdots ③$$

(c)　③ 式より　$N_{\mathrm{A}}=\dfrac{Mg\cos\theta}{2\sin\theta}=\dfrac{Mg}{2\tan\theta}$

① 式より　$F_{\mathrm{B}}=N_{\mathrm{A}}=\dfrac{Mg}{2\tan\theta}$

② 式より　$N_{\mathrm{B}}=Mg$

F_{B} が最大摩擦力「$F_0=\mu N_{\mathrm{B}}$」以下であればすべらずに静止しているので

$$F_{\mathrm{B}}=\frac{Mg}{2\tan\theta}\leqq F_0=\mu\cdot Mg$$

等号は $\theta=\theta_0$ のとき成りたつから

$$\frac{Mg}{2\tan\theta_0}=\mu Mg \qquad \tan\theta_0=\frac{1}{2\mu}$$

(3)　おもりは重力の他に棒から垂直抗力 R，ひもから張力 T を受ける。おもりにはたらく力は **図 b** のようになる。重力の大きさは mg である。おもりにはたらく力のうち，棒に平行な成分の力のつりあいの式は

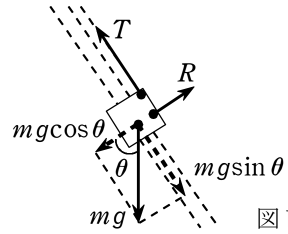


図 b

$$T-mg\sin\theta=0$$

よって　$\boldsymbol{T=mg\sin\theta}$　$\cdots\cdots$ ④

棒に直角な成分の力のつりあいの式は

$$R-mg\cos\theta=0$$

よって　$\boldsymbol{R=mg\cos\theta}$　$\cdots\cdots$ ⑤

(4)　棒には，(1) と同様に N_{A}，N_{B}，F_{B}，重力 Mg がはたらく他に，おもりから R の反作用，ひもから張力 T を受けるので，棒にはたらく力は **図 c** の太実線矢印となる。

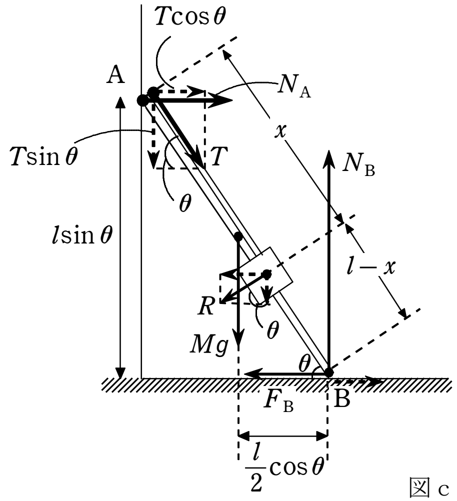


図 c

(5)　棒にはたらく力のうち，水平方向の成分の力のつりあいの式は

$$N_{\mathrm{A}}+T\cos\theta-F_{\mathrm{B}}-R\sin\theta=0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

鉛直方向の力のつりあいの式は

$$N_{\mathrm{B}}-Mg-T\sin\theta-R\cos\theta=0 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

点 B のまわりの力のモーメントのつりあいの式は

$$Mg\cdot\frac{l}{2}\cos\theta+R\cdot(l-x)-N_{\mathrm{A}}\cdot l\sin\theta=0 \qquad \cdots\cdots ⑧$$

⑦ 式に ④，⑤ 式を代入して整理すると

$$\begin{aligned}N_{\mathrm{B}}&=Mg+mg\sin\theta\times\sin\theta+mg\cos\theta\times\cos\theta\\&=\{M+m(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\}g=(M+m)g\end{aligned}$$

⑧ 式に ⑤ 式を代入して整理すると

$$N_{\mathrm{A}} l \sin\theta = \frac{1}{2} Mgl\cos\theta + mg\cos\theta(l-x)$$

$$N_{\mathrm{A}} = \frac{Ml+2m(l-x)}{2l\sin\theta} g\cos\theta = \frac{Ml+2m(l-x)}{2l\tan\theta} g$$

⑥ 式に ④，⑤ 式，N_{A} を代入して整理すると

$$F_{\mathrm{B}} = \frac{Ml+2m(l-x)}{2l\tan\theta} g + mg\sin\theta \times \cos\theta - mg\cos\theta \times \sin\theta = \frac{Ml+2m(l-x)}{2l\tan\theta} g$$

$\theta=\theta_1$ のとき，$F_{\mathrm{B}}=\mu N_{\mathrm{B}}$ が成りたつので

$$\frac{Ml+2m(l-x)}{2l\tan\theta_1} g = \mu \cdot (M+m) g$$

よって　$\tan\theta_1 = \boldsymbol{\dfrac{Ml+2m(l-x)}{2(M+m)\mu l}}$

(6)　題意より

$\theta_1 < \theta_0$　すなわち　$\tan\theta_1 < \tan\theta_0$

これに (2)，(5) の答えを代入すると

$$\frac{Ml+2m(l-x)}{2(M+m)\mu l} < \frac{1}{2\mu}$$

整理して　$Ml+2m(l-x) < (M+m)l$

$$l - x < \frac{l}{2}$$

よって

$\boldsymbol{\dfrac{l}{2} < x}$　$(<l)$