

1.

2 輪車の加速・減速に関する次の問いに答えよ。

図 1 に 2 輪車(質量 m , 車体は変形しない, 車輪は回転し, 前輪と後輪は同じ材質・形状)を示す。車輪の半径は r , 車輪の中心間距離は $5r$ 。重心の水平方向位置は前輪の中心から $1.5r$ で後輪の中心から $3.5r$, 垂直方向は床から高さ $4r$ で車輪の中心の高さから $3r$ である。重心にすべての質量 m が集中しているとして, 2 輪車にはたらく慣性力および重力は重心に作用するとせよ。下向きの重力加速度の大きさを g とし, 床面と車輪の間の動摩擦力は床面から車輪への垂直抗力に比例する。空気抵抗は無視せよ。

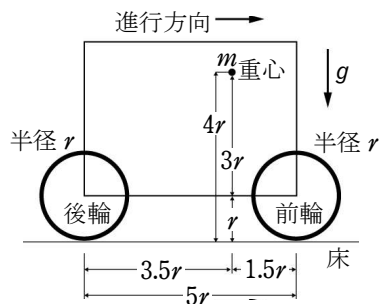


図 1

- [A] (1) 走行中の 2 輪車の前輪と後輪に強くブレーキをかけ両輪の回転を止めたところ, 両輪が床面に接したまま 2 輪車は大きさ a の加速度で減速した。前輪と床面との動摩擦力の大きさを求めよ。
- (2) 後輪が自由に回転する状態で, 走行中の 2 輪車の前輪のみに強くブレーキをかけ回転を止めたところ, 2 輪車は一定の加速度で減速した。後輪が浮き上がらないための, 床面と車輪の動摩擦係数が満たすべき条件を示せ。
- (3) 後輪が自由に回転する状態で, 走行中の 2 輪車の前輪のみに軽くブレーキをかけ, 前輪が床面をすべらずに回転するようにして, 2 輪車を大きさ a の加速度で減速させた。後輪が浮き上がらないための a が満たすべき条件を示せ。車輪と床面との静止摩擦係数は十分に大きいとする。

[B] 前輪が自由に回転する状態で, 静止している 2 輪車の後輪をエンジンで駆動し 2 輪車を大きさ a の加速度で加速した。車輪と床面との静止摩擦係数は十分に大きいとする。

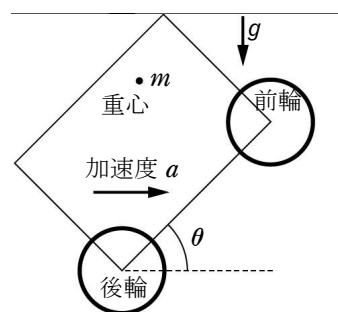


図 2

- (1) 前輪が浮き上がらないための加速度の大きさ a が満たすべき条件を示せ。
- (2) ある加速度の大きさ a では, 前輪が浮き上がり, 車体が水平面となす角度が θ となった(図 2)。加速度 a を g, θ を用いて表せ。ただし, 重心の水平位置は前輪と後輪の車軸間にあるとする。
- (3) 前輪がかろうじて浮き上がらない最大の加速度で走行しているとき, 小石を踏み, 前輪がわずかに浮き上がった。仮に, この加速度を維持してさらに走行しよう

とした場合, 2 輪車はどのような運動をするか, (1), (2) を踏まえて理由をつけて答えよ。

解答 [A] (1) $ma \frac{7g+8a}{10g}$ (2) $\mu' \leq \frac{3}{8}$ (3) $a \leq \frac{3}{8}g$

[B] (1) $a \leq \frac{7}{8}g$ (2) $\frac{7\cos\theta - 6\sin\theta}{2+7\sin\theta + 6\cos\theta}g$

(3) 2 輪車は転倒する(理由省略)。

解説

[A](1) 進行する向きと反対向きに大きさ a の加速度をもつ 2 輪車と同じ運動をする観測者から見ると, 2 輪車には進行する向きに大きさ ma の慣性力がはたらき, 静止している。前輪, 後輪にそれぞれはたらく垂直抗力の大きさを N_1, N_2 , 車輪と床面との動摩擦係数を μ' とする。後輪の接地点まわりの力のモーメントのつりあいより

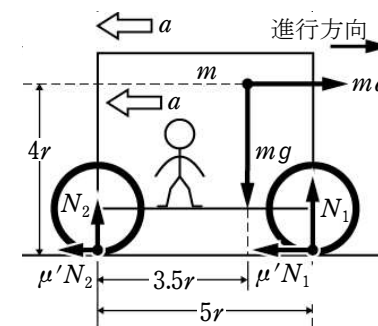


図 a

$$N_1 \times 5r - mg \times 3.5r - ma \times 4r = 0$$

よって $N_1 = \frac{7}{10}mg + \frac{4}{5}ma$ …… ①

2 輪車について, 鉛直方向の力のつりあいより

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

よって

$$N_2 = mg - N_1 = \frac{3}{10}mg - \frac{4}{5}ma \quad \dots\dots ②$$

2 輪車について, 水平方向の力のつりあいより

$$ma - \mu'N_1 - \mu'N_2 = 0$$

$$\mu' = \frac{ma}{N_1 + N_2}$$

動摩擦力の大きさは垂直抗力の大きさに比例するので

$$\begin{aligned} \mu'N_1 &= \frac{ma}{N_1 + N_2} \cdot N_1 \\ &= ma \frac{\frac{7}{10}mg + \frac{4}{5}ma}{mg} \end{aligned}$$

$$= ma \frac{7g+8a}{10g}$$

(2) 後輪にはたらく静止摩擦力の大きさを f_2 とする。前輪には動摩擦力 $\mu'N_1$ がはたらく。

鉛直方向の力のつりあいより

$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

水平方向の力のつりあいより

$$ma - \mu'N_1 - f_2 = 0$$

後輪が浮く直前には $N_2 = 0$, $f_2 = 0$ となるので、後輪が浮く直前の加速度 a は

$$ma = \mu'N_1 = \mu'mg$$

よって $a = \mu'g$ …… ③

後輪が浮き上がらない条件 $N_2 \geq 0$ と、②, ③式より

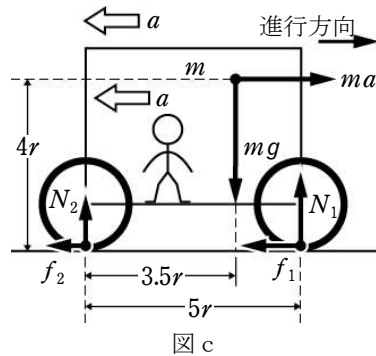
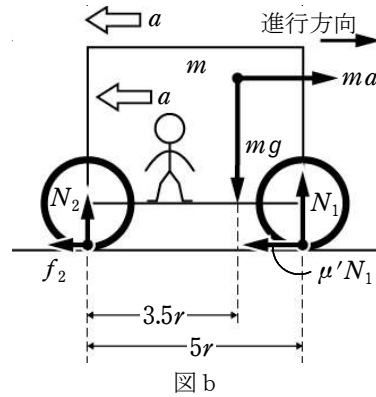
$$N_2 = \frac{3}{10}mg - \frac{4}{5}ma = \frac{3}{10}mg - \frac{4}{5}\mu'mg \geq 0$$

$$\mu' \leq \frac{\frac{3}{10}mg}{\frac{4}{5}mg} = \frac{3}{8} \quad \text{よって} \quad \mu' \leq \frac{3}{8}$$

(3) ②式と、後輪が浮き上がらないための条件 $N_2 \geq 0$ より

$$N_2 = \frac{3}{10}mg - \frac{4}{5}ma \geq 0$$

$$a \leq \frac{\frac{3}{10}mg}{\frac{4}{5}m} = \frac{3}{8}g \quad \text{よって} \quad a \leq \frac{3}{8}g$$



[B](1) 2 輪車とともに運動する観測者から見ると、2 輪車には進行する向きと逆向きに大きさ ma の慣性力がはたらく、静止している。後輪の接地点まわりの力のモーメントのつりあいより

$$N_1 \times 5r + ma \times 4r - mg \times 3.5r = 0$$

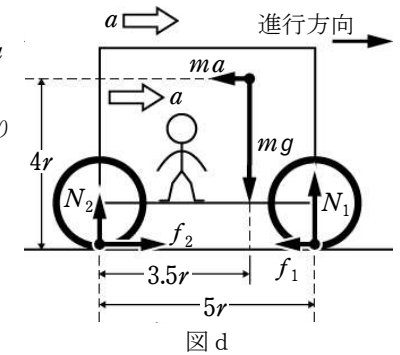
$$\text{よって} \quad N_1 = \frac{7}{10}mg - \frac{4}{5}ma$$

前輪が浮き上がらないための条件は $N_1 \geq 0$

以上より

$$N_1 = \frac{7}{10}mg - \frac{4}{5}ma \geq 0$$

$$a \leq \frac{\frac{7}{10}mg}{\frac{4}{5}m} = \frac{7}{8}g \quad \text{よって} \quad a \leq \frac{7}{8}g$$



(2) 2 輪車の重心を G、重心を通る鉛直線と 2 輪車の下辺との交点を A、G から 2 輪車の下辺に下した垂線との交点を B、後輪の中心を C とする (図 e)。図 e より

$$\begin{cases} GB = 3r \\ BC = 3.5r \\ \angle AGB = \theta \end{cases}$$

であるので

$$AB = 3r \tan \theta$$

$$GA = \frac{3r}{\cos \theta}$$

$$AC = BC - AB = (3.5 - 3 \tan \theta)r$$

である。後輪の接地点まわりの力のモーメントのつりあいより

$$ma(r + AC \sin \theta + GA) - mg \cdot AC \cos \theta = 0$$

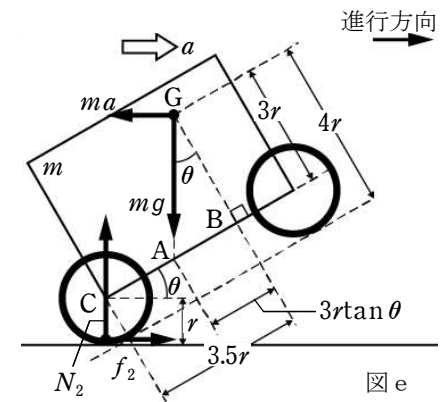
それぞれの距離を代入して

$$ma \left\{ r + (3.5 - 3 \tan \theta)r \sin \theta + \frac{3r}{\cos \theta} \right\} = mg \times (3.5 - 3 \tan \theta)r \cos \theta$$

式を整理する。

$$a \left\{ 2 + (7 - 6 \tan \theta) \sin \theta + \frac{6}{\cos \theta} \right\} = g(7 - 6 \tan \theta) \cos \theta$$

$$a \left\{ 2 + 7 \sin \theta - \frac{6 \sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{6}{\cos \theta} \right\} = g(7 \cos \theta - 6 \sin \theta)$$



$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ も用いて

$$a = \frac{7 \cos \theta - 6 \sin \theta}{2 + 7 \sin \theta + 6 \cos \theta} g$$

(3) 2 輪車は転倒する。

前輪が浮き上がらない最大の加速度は (1) の結果より $a = \frac{7}{8}g$ である。この値は (2) の

答えが $\theta = 0$ のときと一致する。(2) の結果を変形すると

$$a = \frac{7 - 6 \tan \theta}{\frac{2}{\cos \theta} + 7 \tan \theta + 6} g$$

θ がわずかに増加すると、上式の分母が増え、分子が小さくなるため、 a は $\frac{7}{8}g$ よりも小さくなる。このとき 2 輪車にはたらく力のモーメントを考えると、大きさ ma の慣性力による力のモーメントのほうが大きいので、力のモーメントはつりあわず、反時計回りに回転しようとする。よって、2 輪車は後方に転倒する。

2.

次の文を読み各問いに答えよ。(イ)と(オ)の答えは該当する式を求め、その他の問いについてはそれぞれの解答群から最も適当なものを1つ選べ。ただし、同じものを何度選んでもよい。

図1のように水平な床に固定されているクレーン模型を考える。重さ W の一様な棒(アーム)の両端の点 A , B と床近くの点 F に、重さが無視でき、なめらかに回転する定滑車を取り付けられている。アームは支持台上部の点 C で支えられ、なめらかに回転できるようになっている。また、おもりは伸び縮みしない軽い糸を用いて、点 A , B , F の滑車を介して引き上げることができる。以下の問題では、点 D と支持台の根本に固定された点 E の間に、伸び縮みしない軽い糸を張ることによって、アームがつねに水平に保たれている。おもりをつるすときは、滑車間の糸および糸 DE は水平あるいは鉛直に張られており、滑車の大きさは考えなくてよい。なお、 AB , BC , CD の長さをそれぞれ L , $\frac{L}{4}$, $\frac{L}{8}$, 重力加速度の大きさを g とする。

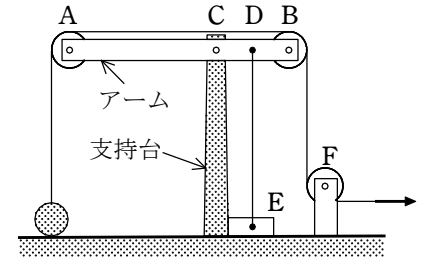


図1

[A] おもりをつるす糸を引いていないとき、糸 DE がアームを引く力の大きさを S とすると、アームが支点 C を押す力の鉛直方向の成分の大きさ R は 。また、支点 C のまわりの力のモーメントを考えると、糸 DE の引く力の大きさ S は W である。

いま、おもりをつるす糸を図1の矢印の方向にゆっくり引いたところ、おもりは床からわずかに浮いた状態でつりあった。このときの糸を引く力の大きさを T_0 とする。点 A , B の滑車に作用する糸の力は各々の滑車の中心にはたらくと考えてよいので、糸 DE の引く力の大きさ S は、糸を引かないときにくらべ だけ大きくなり、また、アームが支点 C を押す力の鉛直方向の成分の大きさ R は だけ大きくなる。

次に、おもりをつるす糸を大きさ T の一定の力で引くと、おもりに加速度 a が生じた。おもりの質量を m , 鉛直上向きを正とすれば、おもりの運動方程式は になる。このおもりを高さ h まで持ち上げるのに要する時間が t_0 であるとき、糸を引く力の大きさ T は で表される。また、おもりを高さ h まで持ち上げるとき、糸を引く力がする仕事は、つりあいを保ちながらゆっくりとおもりを高さ h まで持ち上げるときにくらべ , となる。

(ア) の解答群

- ① アームの重さ W に等しい
- ② 糸 DE の引く力の大きさ S に等しい
- ③ アームの重さ W と糸 DE の引く力の大きさ S の和に等しい
- ④ アームの重さ W と糸 DE の引く力の大きさ S の差に等しい

(ウ), (エ) の解答群

- ① 0 ② T_0 ③ $2T_0$ ④ $4T_0$ ⑤ $6T_0$

(カ) の解答群

- ① $mg + \frac{mh}{t_0}$ ② $mg + \frac{2mh}{t_0^2}$ ③ mg ④ $mg - \frac{2mh}{t_0^2}$
- ⑤ $mg - \frac{mh}{t_0}$

(キ) の解答群

- ① 大きくなり ② 小さくなり ③ 変わらず

(ク) の解答群

- ① mgh ② $mgh - \frac{2mh}{t_0}$ ③ $mgh - \frac{2mh^2}{t_0^2}$ ④ $mgh + \frac{2mh}{t_0}$
- ⑤ $mgh + \frac{2mh^2}{t_0^2}$

[B] 次に、おもりを外し、なめらかな床に水平に置かれた重さ w 、長さ l の一様な細い棒の一端に糸をつけてゆっくりと引いたところ、図 2 のような状態であつた。このとき糸を引く力の大きさ T は であり、アームが支点 C を押す力の水平方向の成分の大きさ H は である。一方、あらい床上で同じ細い棒をゆっくりと引いたところ、図 3 のような状態であつた。このとき、糸を引く力の大きさ T は、なめらかな床上で引くときにくらべ , 倍になる。また、アームが支点 C を押す力の水平方向の成分の大きさ H は である。

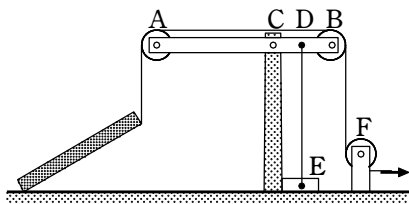


図 2

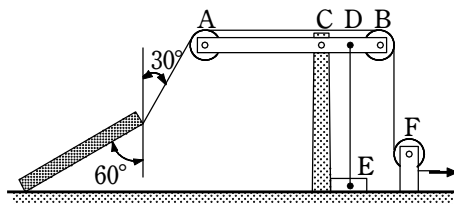


図 3

(ケ), (コ) の解答群

- ① 0 ② $\frac{w}{2}$ ③ w ④ $2w$ ⑤ $4w$

(サ) の解答群

- ① 大きくなり ② 小さくなり ③ 変わらず

(シ) の解答群

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

(ス) の解答群

- ① 0 ② $\frac{1}{4}w$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}w$ ④ $\frac{1}{2}w$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}w$

解答 [A] (ア) ③ (イ) 2 (ウ) ④ (エ) ⑤ (オ) $ma = T - mg$
 (カ) ② (キ) ① (ク) ⑤
 [B] (ケ) ② (コ) ① (サ) ① (シ) ④ (ス) ③

解説

アームには A, B にはたらく糸の張力 T (下向き), D にはたらく糸の張力 S (下向き), C にはたらく支持台が支える力 (アームが支点 C を押す力の反作用で、鉛直成分 R は上向き, 水平成分は (ス) のときだけ右向き), および重力 W の 5 力がはたらく。アームが静止しているとき, 上下方向, 左右方向でこれらの力がつりあい, C のまわりの力のモーメントがつりあう。

[A] アームにはたらく力は図 a のようになる。

(ア) 図 a で T を 0 としたとき, 上下のつりあいの式より

$$R - W - S = 0$$

$$R = W + S \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(イ) W は反時計まわり, S は時計まわりの力のモーメントをもち, R は C を作用点としているので力のモーメントをもたない。C のまわりの力のモーメントのつりあいの式より

$$W \times \frac{L}{4} - S \times \frac{L}{8} = 0 \quad S = 2 \times W$$

(ウ) $T = T_0$ のとき, (イ) と同様に C のまわりの力のモーメントのつりあいの式をたてると

$$W \times \frac{L}{4} + T_0 \times \frac{3}{4}L - S \times \frac{L}{8} - T_0 \times \frac{L}{4} = 0$$

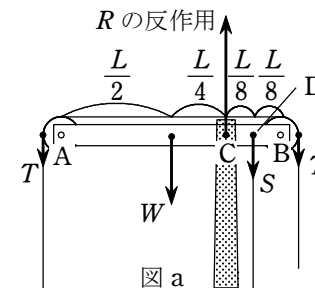


図 a

$$S = 2W + 4T_0$$

よって、(イ)より $4T_0$ 大きくなる。……④

(エ) 上下方向のつりあいより

$$R - T_0 - W - S - T_0 = 0$$

$$R = W + S + 2T_0 = W + (2W + 4T_0) + 2T_0 \\ = 3W + 6T_0$$

(ア)では $R = W + S$ かつ $S = 2W$ なので

$$R = W + 2W = 3W$$

であったので、 $6T_0$ 大きくなる。……⑤

(オ) おもりに上向きに T 、下向きに重力 mg がはたらくので

$$[ma = F] \text{ より } ma = T - mg$$

(カ) 等加速度運動の式「 $x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ 」に初速 $v_0 = 0$ 、変位 $x = h$

を代入すると

$$h = 0 \times t_0 + \frac{1}{2} at_0^2 \quad a = \frac{2h}{t_0^2}$$

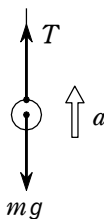
これを(オ)の式に代入して

$$m \times \frac{2h}{t_0^2} = T - mg \quad t = mg + \frac{2mh}{t_0^2} \quad \dots\dots ②$$

(キ) 等速度で持ち上げるときは $T = mg$ の張力になるが、加速度 a で持ち上げるときは(カ)の答えのように mg より強い力で引くことになるので、仕事も大きくなる。……①

(ク) 仕事の定義 ($F \times x$) より

$$T \times h = \left(mg + \frac{2mh}{t_0^2} \right) h \\ = mgh + \frac{2mh^2}{t_0^2} \quad \dots\dots ⑤$$



[B] (ケ) 棒には図 b のような力がはたらいてつりあっている。このとき、床面との接点 P のまわりの力のモーメントのつりあいは、床と棒のなす角度を θ として

$$T \cos \theta \times l - w \cos \theta \times \frac{l}{2} = 0$$

よって $T = \frac{w}{2}$ ……②

(コ) アームの A において糸は鉛直方向についているので、アームにはたらく力は図 a

と同じような状況になり、左右方向の力はない。よって

$$H = 0 \quad \dots\dots ①$$

(サ)(シ) 棒にはたらく力は図 c のようになる。

P のまわりの力のモーメントのつりあいは

$$T \sin 30^\circ \times l - w \cos 30^\circ \times \frac{l}{2} = 0$$

$$T = \frac{w}{2 \tan 30^\circ} = \frac{w}{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} w$$

となるので、(ケ)に比べて大きくなり、……(サ)①

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} w}{\frac{w}{2}} = \sqrt{3} \text{ 倍になる。} \quad \dots\dots (シ) ④$$

(ス) アームにはたらく力は図 d のようになり、

左右のつりあいより $H - T \cos 60^\circ = 0$

T を代入すると

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2} w \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} w \quad \dots\dots ③$$

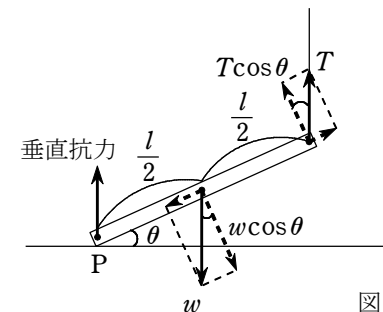


図 b

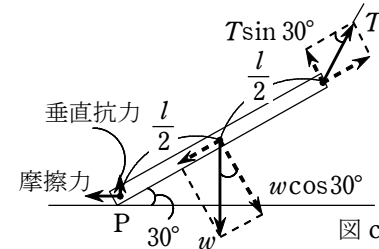


図 c

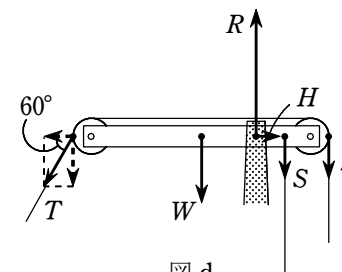


図 d