1．

図1に示すように2個の円柱形のおもりA，Bが糸でつながれて，天井に固定した2個の定滑車でつるされている。Aは円柱形の容器Cの中の液体に一部が入っており，AはCに触れていない。Cの底面は，ばね定数と自然の長さが等しい3本のばねで，水平な床から支えられている。この状態でA，B，Cは静止している。このとき，Aの液体に入っている部分の長さは d〔m〕，ばねの長さは l〔m〕，Cの底面から液面までの高さは h〔m〕，Bの床からの高さは s〔m〕であった。

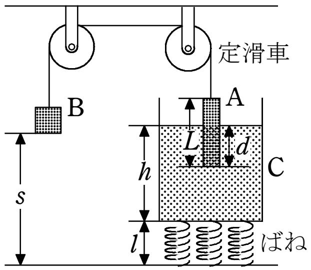


図1：初めの状態

Aの底面積は S_1〔m^2〕，高さは L〔m〕，密度は ρ_1〔kg/m^3〕である。Cの底面積は S_0〔m^2〕で，中に入っている液体の密度は ρ_0〔kg/m^3〕である。ここで，$\rho_0<\rho_1$ である。1本のばねのばね定数は k〔N/m〕である。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とし，AとCの底面は常に水平を保つものとして，次の問いに答えよ。

(1)　Bの質量を求めよ。

次に，図2に示すように質量 m〔kg〕のおもりDをBにつり下げたところ，Bが少し下がった位置で全体は静止した。Aはこの状態でもまだ液体に一部が入っていた。このとき，Aが液体に入っている部分の長さは d'〔m〕，ばねの長さは l'〔m〕，Cの底面から液面までの高さは h'〔m〕，Bの床からの高さは s'〔m〕になった。

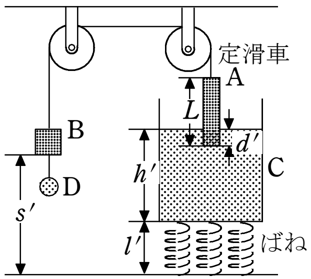


図2：おもりDをBにつり下げた後の状態

(2)　$d'-d$ を求めよ。

(3)　$l'-l$ を求めよ。

(4)　$h'-h$ を求めよ。

(5)　$s'-s$ を求めよ。

解答　(1)　$(\rho_1L-\rho_0d)S_1$〔kg〕　(2)　$-\dfrac{m}{\rho_0S_1}$〔m〕　(3)　$\dfrac{mg}{3k}$〔m〕

(4)　$-\dfrac{m}{\rho_0S_0}$〔m〕　(5)　$-\left(\dfrac{S_0-S_1}{\rho_0S_0S_1}+\dfrac{g}{3k}\right)m$〔m〕

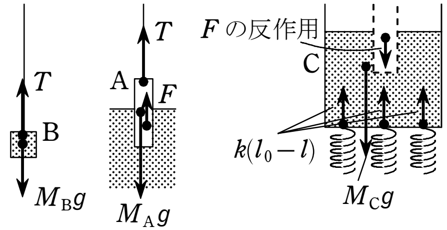
解説

ヒント　(1)　密度 ρ，体積 V の物体にはたらく重力の大きさは ρVg である。また，浮力の大きさは，液体の密度を ρ_0，液体中の物体の体積を $V_中$ とすれば，$\rho_0V_中g$ となる。また，浮力の反作用にも着目する。

(2)〜(5)　(1)で求めた関係と同じ関係が成りたつことに着目するとよい。

(1)　おもりB，おもりA，容器C(中の液体を含む)の質量をそれぞれ M_B，M_A，M_C とする。「$M=\rho V$」より

$M_A=\rho_1S_1L$　……①



おもりB，A，容器Cにはたらく力を図示する。ここで，糸の張力の大きさを T，Aにはたらく浮力の大きさを F，ばねの自然の長さを l_0 とする。

おもりB，A，容器Cにはたらく力のつりあいの式は，それぞれ

$T=M_Bg$　……②

$T+F=M_Ag$　……③

$3k(l_0-l)=M_Cg+F$ ※A←　……④

また，Aにはたらく浮力の大きさ F は「$\rho_0V_中g$」より

$F=\rho_0S_1dg$　……⑤

②式と③式から T を消去して，①式と⑤式を代入して M_B について解くと

$M_B=(\rho_1L-\rho_0d)S_1$〔kg〕　……⑥

(2)　問題文の図2で，BとDをまとめて一体として考えれば，(1)と同じ関係が成立する。⑥式で，M_B を M_B+m に，d を d' に置きかえれば

$M_B+m=(\rho_1L-\rho_0d')S_1$　……⑦

⑦式−⑥式より　$m=-\rho_0d'S_1+\rho_0dS_1=-(d'-d)\rho_0S_1$ ※B←

ゆえに　$d'-d=-\dfrac{m}{\rho_0S_1}$〔m〕　……⑧

(3)　図1，図2での容器Cにはたらく力のつりあいは，⑤式も用いて

図1：$3k(l_0-l)=M_Cg+\rho_0S_1dg$　……⑨

図2：$3k(l_0-l')=M_Cg+\rho_0S_1d'g$ ※C←　……⑩

⑨式−⑩式より　$3k(l'-l)=-(d'-d)\rho_0S_1g$

⑧式を代入して整理すれば

$l'-l=-\dfrac{1}{3k}(d'-d)\rho_0S_1g=-\dfrac{1}{3k}\left(-\dfrac{m}{\rho_0S_1}\right)\rho_0S_1g=\dfrac{mg}{3k}$〔m〕　……⑪

(4)　図1と図2で，液体の体積は変わらないから

$S_0h-S_1d=S_0h'-S_1d'$

$h'-h=\dfrac{S_1}{S_0}(d'-d)=\dfrac{S_1}{S_0}\left(-\dfrac{m}{\rho_0S_1}\right)$ ※D← $=-\dfrac{m}{\rho_0S_0}$〔m〕　……⑫

(5)　床から A および B の下端までの高さの和は一定である。

$$s+(l+h-d)=s'+(l'+h'-d')$$

整理して，⑧，⑪，⑫ 式を代入すると

$$\begin{aligned} s'-s&=-(l'-l)-(h'-h)+(d'-d) \\ &=-\frac{mg}{3k}-\left(-\frac{m}{\rho_0 S_0}\right)+\left(-\frac{m}{\rho_0 S_1}\right) \\ &=-\left(\frac{S_0-S_1}{\rho_0 S_0 S_1}+\frac{g}{3k}\right)m \text{ [m]} \end{aligned}$$

←※A　容器 C 内の液体には，おもり A にはたらく浮力の反作用 (大きさ F) がはたらく。

←※B　別解　B と D を一体とした質量 M_B' のおもりを考えて，(1) と同様に求めると

$$M_B'=(\rho_1 L-\rho_0 d')S_1$$

となる。よって

$$m=M_B'-M_B=\rho_0(d-d')S_1$$

←※C　l を l' に，d を d' とした。

←※D　⑧ 式を用いる。

2．

次の文中の空欄 ア ～ オ に当てはまる式を記入せよ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

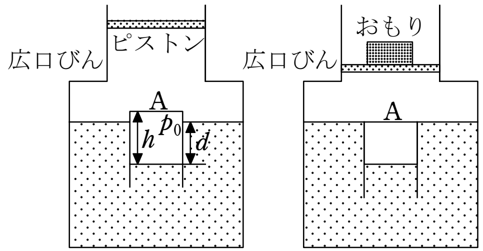


図 1　　図 2

図 1 のように，広口びんに水を入れ，ガラスでできた円筒形の容器 A にいくらか水を入れた後に，A を底面が上になるようにして広口びん内の水に静かに浮かべる。その後，なめらかに動く質量の無視できるピストンで広口びんの口をふさぐ。A 内には空気が入っており，その気柱の断面積は S_A，高さは h で，A 内の水面は広口びんの水面より d だけ下方の位置にある。A の側壁および底の厚さは薄く，無視できる。このときの A 内の空気の圧力を p_0 とし，水の密度を ρ とすると，広口びん内の空気の圧力は ア である。A にはたらく鉛直方向の力のつりあいを考えることにより，A の質量は イ であることがわかる。

次に，図 2 のように，ピストンの上におもりを静かに置いたところ，容器 A 内の気柱の上端がちょうど広口びん内の水面と同じ位置になる所で A は静止した。この間，A 内の空気の温度は一定であった。このとき，A 内の水面は広口びんの水面より ウ だけ下方にあり，A 内の空気の圧力は エ である。また，ピストンの断面積を S_B とすると，ピストンの上に置いたおもりの質量は オ である。

解答　(ア)　$p_0-\rho dg$　　(イ)　$\rho d S_A$　　(ウ)　d　　(エ)　$\frac{h}{d}p_0$　　(オ)　$\frac{(h-d)p_0 S_B}{dg}$

解説

(ア)　広口びん内の空気の圧力を p とすると，圧力の式「$p=\frac{F}{S}$」より，びん内の空気が面積 S_A の面を押す力の大きさは pS_A になる。図 a のように容器 A の外側に面積 S_A，高さ d の水の柱を考える。この柱の質量 $m_水$ は密度の定義「$\rho=\frac{m}{V}$」より

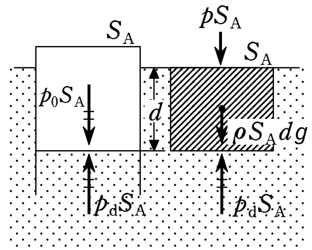


図 a

$$m_水=\rho S_A d$$

であるから，水の柱にかかる重力の大きさは

$$m_水 g=\rho S_A dg$$

となる。深さ d における水圧を p_d とすると，水の柱にはたらく力のつりあいより

$$p_dS_A - pS_A - \rho S_A dg = 0$$

よって　$p = p_d - \rho dg$　…… ①

一方，容器 A の内側の水面では，中の空気が水面を押す力と，深さ d における水圧が中の空気を押す力の大きさが等しいことから

$p_0S_A = p_dS_A$　　よって　$p_d = p_0$　…… ②

①，② 式より　$\boldsymbol{p = p_0 - \rho dg}$　　　…… ③

(イ)　容器 A には，底面の外側から広口びん内の空気が押す力 pS_A，内側から A 内の空気が押す力 p_0S_A，重心点に重力 m_Ag (m_A を A の質量とする) がはたらき，この 3 力がつりあうので

$p_0S_A - pS_A - m_Ag = 0$　…… ④

③ 式を代入すると

$$m_Ag = p_0S_A - (p_0 - \rho dg)S_A = \rho dgS_A$$

よって　$\boldsymbol{m_A = \rho dS_A}$　…… ⑤

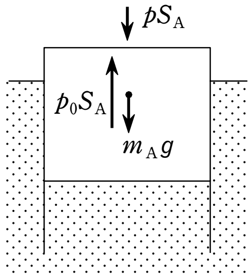


図 b

(ウ)　このときの広口びん内の空気の圧力を p'，容器 A 内の空気の圧力を p_0'，A 内の水面の深さを d' とする。(ア) と同様に考えると，③ 式は

$p' = p_0' - \rho d'g$　…… ⑥

となる。また容器 A にはたらく力のつりあいの式は

$p_0'S_A - p'S_A - m_Ag = 0$　…… ⑦

となる (図 c)。⑦ 式に ⑤，⑥ 式を代入すると

$$p_0'S_A - (p_0' - \rho d'g)S_A - \rho dS_Ag = 0$$

整理すると　$\rho d'S_Ag = \rho dS_Ag$

よって　$\boldsymbol{d' = d}$

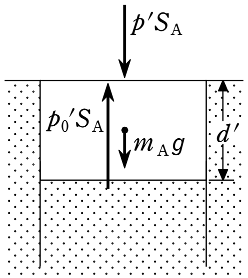


図 c

(エ)　A 内の空気についてボイルの法則「$pV =$ 一定」を用いると

$$p_0S_Ah = p_0'S_Ad'$$

(ウ) より　$d' = d$ なので

$$p_0' = \frac{h}{d'}p_0 = \boldsymbol{\frac{h}{d}p_0}$$

(オ)　大気圧を $p_{大気}$ とすると，ピストンにはたらく力は，おもり (質量を M とする) を置く前は図 d，置いた後は図 e となる。それぞれについてピストンにはたらく力のつりあいの式を立てると

$pS_B - p_{大気}S_B = 0$　…… ⑧

$p'S_B - p_{大気}S_B - Mg = 0$　…… ⑨

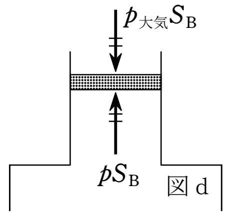


図 d

⑧ 式を ⑨ 式に代入して $p_{大気}$ を消去すると

$p'S_B - pS_B = Mg$　…… ⑩

⑥ 式に (ウ)，(エ) の答えを代入すると

$$p' = \frac{h}{d}p_0 - \rho dg$$

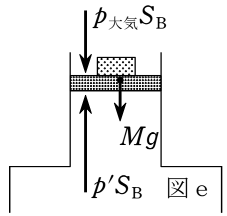


図 e

であるから，これと ③ 式より

$$p' - p = \left(\frac{h}{d}p_0 - \rho dg\right) - (p_0 - \rho dg)$$

$$= \frac{h}{d}p_0 - p_0 = \frac{h-d}{d}p_0$$

となる。これを ⑩ 式に代入して

$$\frac{h-d}{d}p_0S_B = Mg$$

よって　$M = \boldsymbol{\frac{(h-d)p_0S_B}{dg}}$