1．

図 1 のように，水平面と角度 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ をなすあらい斜面がある。質量 m の物体 A には，質量の無視できる伸び縮みしない糸が結ばれている。糸の他端には質量 M の物体 B が，斜面上部のなめらかにまわる滑車を通して，とりつけられている。

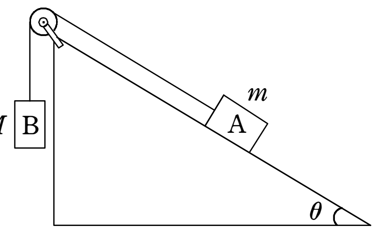


図 1

物体 A と斜面との間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

まず，図 2 のように，糸が斜面の最大傾斜方向と平行な場合を考える。

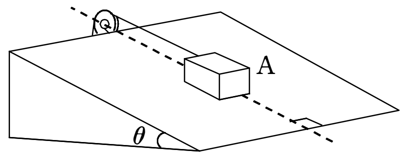


図 2

(1)　物体 A が斜面上で静止しているとしよう。このとき，物体 A にはたらく摩擦力の大きさを，m，M，θ，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(2)　物体 A を斜面上で静止させておくためには，物体 B の質量 M の値がある範囲内になければならない。この M の範囲の下限値と上限値を，m，θ，μ，g のうちの必要なものを用いて表せ。なお，(a) $\mu<\tan\theta$，(b) $\mu\geqq\tan\theta$，それぞれの場合について答えよ。

次に，図 3 のように，糸が斜面の最大傾斜方向と角度 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ をなしている場合を考える。

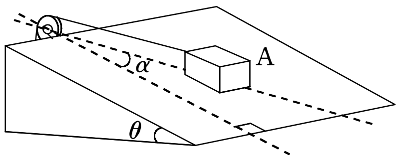


図 3

(3)　物体 A が斜面上で静止しているとしよう。このとき，物体 A にはたらく摩擦力の大きさを，m，M，θ，α，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(4)　μ がある値 μ_c よりも小さい場合は ($\mu<\mu_c$)，物体 B の質量 M の値をどのように選んでも，物体 A を静止させておくことができない。この μ_c を，m，θ，α，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(5)　$\mu\geqq\mu_c$ の場合に，物体 A を斜面上で静止させておくためには，物体 B の質量 M の値がある範囲内になければならない。この M の範囲の下限値と上限値を，m，θ，α，μ，g のうちの必要なものを用いて表せ。なお，(a) $\mu<\tan\theta$，(b) $\mu\geqq\tan\theta$，それぞれの場合について答えよ。

解答　(1)　$|(M-m\sin\theta)|g$

(2)　(a)　下限値：$m(\sin\theta-\mu\cos\theta)$，　上限値：$m(\sin\theta+\mu\cos\theta)$

(b)　下限値：0，　上限値：$m(\sin\theta+\mu\cos\theta)$

(3)　$g\sqrt{M^2+m^2\sin^2\theta-2Mm\sin\theta\cos\alpha}$

(4)　$\tan\theta\sin\alpha$

(5)　(a)　下限値：$m\left(\sin\theta\cos\alpha-\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)$

上限値：$m\left(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)$

(b)　下限値：0，　上限値：$m\left(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)$

解説

斜面上の物体の力のつりあいでは，まず重力を斜面方向と斜面に垂直な方向とに分解し，外力と静止摩擦力，重力の斜面方向の成分の 3 力のつりあいを考える。外力が斜面の最大傾斜方向と異なる方向にはたらく場合，静止摩擦力の方向は，外力と反対向きでも，最大傾斜方向でもなく，斜面上の二次元平面内において力のつりあいが成り立つ方向であることに注意したい。また (4)，(5) の外力の向きが最大傾斜方向から角度 α ずれた場合の解法には，(4) には M の 2 次方程式の解の判別式の利用，(5) では (2) の外力が最大傾斜方向における解答を利用して，両者の力の比較から力を置き換えて答えを求めることが早道である。

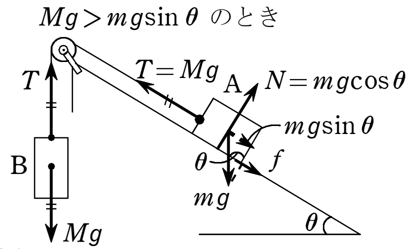


図 a

(1)　ひもの張力が Mg であるので，斜面方向の力のつりあい (図 a) より

$$Mg=mg\sin\theta+f$$

$$f=(M-m\sin\theta)g \quad \cdots\cdots ①$$

① 式は，M と $m\sin\theta$ の大小関係により負の値 (静止摩擦力 f が斜面上向きのとき) もとるので，摩擦力の大きさは f の絶対値 $|f|$ である。

$$|f|=|(M-m\sin\theta)|g \quad \cdots\cdots ②$$

(2)　斜面上で A がすべらずに静止している条件は，$|f|\leqq\mu mg\cos\theta$ である。

(a)　$\mu<\tan\theta$ のとき，斜面に物体 A を置いただけでは，A はすべってしまう[※A←]。

② 式と条件より

$|(M-m\sin\theta)|g \leqq \mu mg\cos\theta$

$-\mu mg\cos\theta \leqq (M-m\sin\theta)g \leqq \mu mg\cos\theta$

ゆえに　$m(\sin\theta-\mu\cos\theta) \leqq M \leqq m(\sin\theta+\mu\cos\theta)$

となるので，M の下限値は　$\boldsymbol{m(\sin\theta-\mu\cos\theta)}$

上限値は　$\boldsymbol{m(\sin\theta+\mu\cos\theta)}$

(b)　$\mu \geqq \tan\theta$ のとき，斜面に A を置いただけで，A は斜面上で静止してしまう※A←。したがって，M の下限値は　**0**

上限値は (a) と同じなので　$\boldsymbol{m(\sin\theta+\mu\cos\theta)}$

(3)※B←　物体 A が斜面上で静止しているとき，斜面内で物体にはたらく 3 力，張力 $T=Mg$，重力の斜面方向の成分 $mg\sin\theta$，静止摩擦力 f が二次元の力のつりあい状態にある (図 b)。この 3 力の幾何学的関係は図 c のようになる。余弦定理※C← より

$f^2=(Mg)^2+(mg\sin\theta)^2-2(Mg)(mg\sin\theta)\cos\alpha$

ゆえに

$\boldsymbol{f=g\sqrt{M^2+m^2\sin^2\theta-2Mm\sin\theta\cos\alpha}}$　…… ③

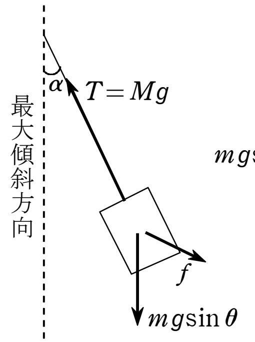


図 b

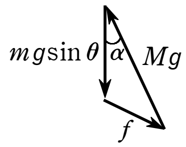


図 c

(4)　A が斜面上で静止する条件は，$f \leqq \mu mg\cos\theta$ である。③ 式を用いると

$g\sqrt{M^2+m^2\sin^2\theta-2Mm\sin\theta\cos\alpha} \leqq \mu mg\cos\theta$

両辺とも正なので 2 乗し，M について整理すると

$M^2-2m\sin\theta\cos\alpha\cdot M-m^2(\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \leqq 0$　…… ④

このような M が存在するためには，左辺 (M の 2 次式) $=0$ の解の判別式が正であればよい※D←。$(m\sin\theta\cos\alpha)^2+m^2(\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta) \geqq 0$※E←

これを整理すると　$\mu^2 \geqq \tan^2\theta\sin^2\alpha$

$\mu>0$ より　$\mu \geqq \tan\theta\sin\alpha$

これより，物体 A が静止するための μ の最小値 μ_C は

$\boldsymbol{\mu_C=\tan\theta\sin\alpha}$

(5)※F←　物体 A が斜面上にギリギリ静止している状態 (摩擦力は最大摩擦力 $\mu mg\cos\theta$) で，物体 A にはたらく 3 力，張力 $T=Mg$，重力の斜面方向の成分 $mg\sin\theta$，摩擦力 $f=\mu mg\cos\theta$ のつりあいを，糸方向と糸に直交する方向で考える (図 d)。

糸に直交する方向のつりあいより，摩擦力の糸に直交する方向の成分 $f_\perp$ の大きさは

$f_\perp=mg\sin\theta\sin\alpha$

摩擦力の糸方向の成分 $f_{/\!/}$ の大きさは，三平方の定理より

$f_{/\!/}=\sqrt{(\mu mg\cos\theta)^2-f_\perp{}^2}$

$=mg\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}$　…… ⑤

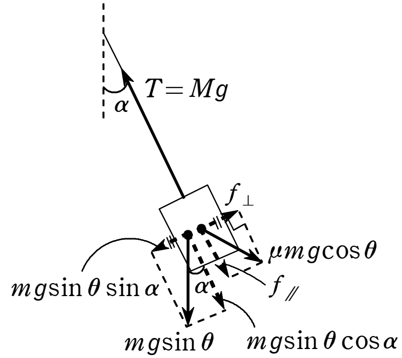


図 d

物体 A にはたらく力の糸方向のつりあいを図 e に示す。これと図 a を比較すると，

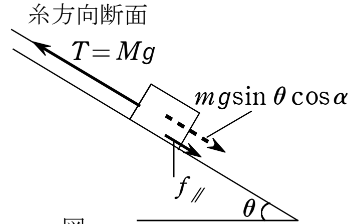


図 e

重力の斜面成分：	図 a	$mg\sin\theta$	$\Longleftrightarrow$	図 e	$mg\sin\theta\cos\alpha$
摩擦力：		$f=\mu mg\cos\theta$			$f_{/\!/}$ (⑤ 式)

という対応関係がわかる。したがって，(2) の結果にこの対応関係を代入して，

(a)　$\mu<\tan\theta$ のとき

M の下限値は　$\boldsymbol{m\left(\sin\theta\cos\alpha-\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)}$

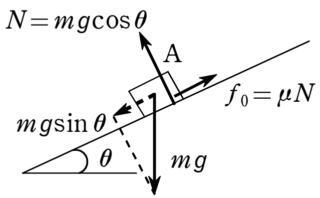
M の上限値は　$\boldsymbol{m\left(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)}$

(b)　$\mu \geqq \tan\theta$ のとき

M の下限値は　**0**

M の上限値は　$\boldsymbol{m\left(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)}$

←※A



すべり出すギリギリの状態では，摩擦力は最大摩擦力 $f_0=\mu N$ である。

斜面方向の力のつりあいより，

$$mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$$

よって　$\mu=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

よって，$\mu>\tan\theta$ のときは，A は斜面上をすべらない。

←※B 別解　静止摩擦力を最大傾斜方向の成分 f_1 と，それに直角な成分 f_2 に分解すると，物体 A の力のつりあいより

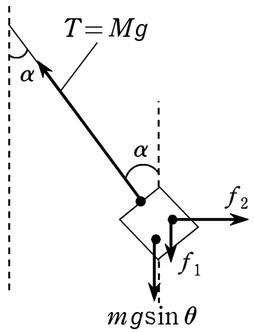
$$f_1=Mg\cos\alpha-mg\sin\theta$$

$$f_2=Mg\sin\alpha$$

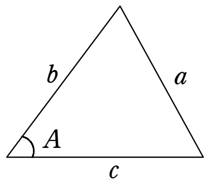
$f=\sqrt{{f_1}^2+{f_2}^2}$ より

$$f=\sqrt{(Mg\cos\alpha-mg\sin\theta)^2+(Mg\sin\alpha)^2}$$

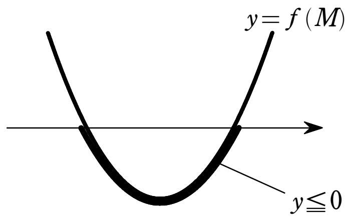
$$=g\sqrt{M^2+m^2\sin^2\theta-2Mm\sin\theta\cos\alpha}$$



←※C　余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



←※D　判別式>0 ということは，$y=$左辺 (M の 2 次式) に異なる 2 解があるので，グラフは下図のようになる。すなわち，y(左辺)$\leqq 0$ となる M が存在する。



←※E　$y=ax^2+2bx+c$ の解の判別式 D は　$D=b^2-ac$

←※F 別解　(4) の M についての 2 次式 ④ において

$$M^2-2m\sin\theta\cos\alpha\cdot M+m^2(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)=0$$

とおき，ギリギリ静止している状態 ($f=\mu mg\cos\theta$) における M の値を求める。解の公式より

$$M=m\sin\theta\cos\alpha\pm\sqrt{(m\sin\theta\cos\alpha)^2-m^2(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)}$$

$$=m(\sin\theta\cos\alpha\pm\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha})$$

$$M_{上限値}=m(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha})$$

$$M_{下限値}=m(\sin\theta\cos\alpha-\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha})$$

となる。あとは μ の値により (2)(5) と同様に考えればよい。

2．

次の文章の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ には適切な数式を記入し，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ には適切な文章や図を記入せよ。

図1に示すように，固定された平板上に1辺の長さが L の立方体Aをおき，両側面に糸を付け，それぞれ張力 T_0 および T_1 で糸を引いた。立方体Aと平板との静止摩擦係数は μ，立方体の両側面と糸とのなす角度はそれぞれ $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。立方体Aは平板に対して平行にしか動かない (回転しない) とする。

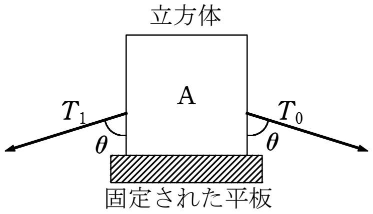


図1

$T_0=T_1$ の状態から，T_0 のみを少しずつ増加させたとき，立方体Aがすべり始める直前の T_0 を T_1 を用いて表すと，

$$T_0=\boxed{\text{ア}}\ \cdots\cdots①$$

となる。①式の導き方を $\boxed{\text{イ}}$ に記述せよ。

次に，n 個の立方体Aを固定された正 n 角柱の各側面におき，互いに糸で結んだ。正 n 角柱の1辺の長さは L であり，立方体Aと正 n 角柱との静止摩擦係数は μ である。糸の張力を順に T_0，T_1，……，T_n とする。図1の場合と同じように，n 個の立方体Aと $n+1$ 本の糸とのなす角 θ は全て等しいとする。図2は $n=3$ の場合の例である。θ を n で表すと，$\theta=\boxed{\text{ウ}}$ である。$T_0=T_n$ の状態から少しずつ T_0 のみを増加させたとき，n 個の立方体Aがすべり始める直前の T_0 を T_n を用いて表すと

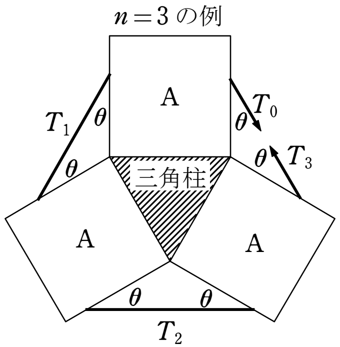


図2

$$T_0=\boxed{\text{エ}}\ \cdots\cdots②$$

となる。②式の導き方を $\boxed{\text{オ}}$ に記述せよ。

$n=\infty$ のときの②式を考慮すると

$$T_0\leqq T_\infty e^{2\pi\mu}\ \cdots\cdots③$$

となる場合にはすべりが起こらないことが導かれる。ここで，$e=2.718\cdots\cdots$ である。③式が表すような現象の具体例を $\boxed{\text{カ}}$ に説明せよ。

解答　(ア)　$\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$

(イ)　立方体Aにはたらく力は，T_0，T_1 の他に，平板からの垂直抗力 N と摩擦力 f である。

平板に垂直方向の力のつりあいより，

$$N-T_0\cos\theta-T_1\cos\theta=0$$

よって　$N=(T_0+T_1)\cos\theta\ \cdots\cdots$(a)

また，平板に平行な方向の力のつりあいより

$$T_0\sin\theta-T_1\sin\theta-f=0\ \cdots\cdots\text{(b)}$$

Aがすべり始める直前の摩擦力は最大摩擦力 f_0 であるから

$$f\Longrightarrow f_0=\mu N\cdots\cdots\text{(c)}$$

(c) に (a)，(b) を代入して

$$(T_0-T_1)\sin\theta=\mu(T_0+T_1)\cos\theta$$

よって　$T_0=\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$

(ウ)　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$

(エ)　$T_0=\left(\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}\right)^nT_n$　ただし，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$

(オ)　T_0 を T_1 で表すと (ア) で求めたように

$$T_0=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$$

同様に，T_1 を T_2 で，T_2 を T_3 で，……，T_{n-1} を T_n で表すと

$$T_1=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_2$$

$$T_2=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_3$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$T_{n-1}=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_n$$

以上を辺々かけあわせると

$$T_0=\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}\right)^nT_n\quad\text{ただし，}\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$$

(カ)　馬を止めておくのに手綱を柱に縛りつけるのではなく，柱に手綱を数回巻きつけ，他端におもりをつけて垂れ下げておくだけで馬を止めておくことができる。

(解説)

立方体 A の質量は無視できる，すなわち重力は考えないとする。

（ア），（イ） 立方体 A にはたらく力は，T_0，T_1 の他に，平板からの垂直抗力 N と摩擦力 f である。平板に垂直方向の力のつりあいより，

$$N-T_0\cos\theta-T_1\cos\theta=0$$

よって　$N=(T_0+T_1)\cos\theta$ …… (a)

また，平板に平行な方向の力のつりあいより

$$T_0\sin\theta-T_1\sin\theta-f=0 \quad \cdots\cdots \text{(b)}$$

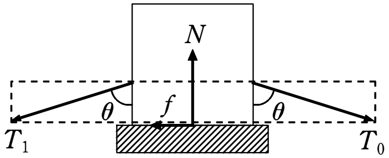


図 a

A がすべり始める直前の摩擦力は最大摩擦力 f_0 であるから

$$f \Longrightarrow f_0=\mu N \quad \cdots\cdots \text{(c)}$$

(c) に (a)，(b) を代入して

$$(T_0-T_1)\sin\theta=\mu(T_0+T_1)\cos\theta$$

よって　$T_0=\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$

（ウ） 正 n 角形を n 個の立方体で囲むと，図の三角形 OPQ が n 個できる。三角形の内角の和は π (＝180°) であるから，n 個の三角形の内角の和は $n\pi$ となる。$n\pi$ には，θ が $2n$ 個と中心部分の 2π が含まれるから

$$n\pi=2n\theta+2\pi$$

ゆえに　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$

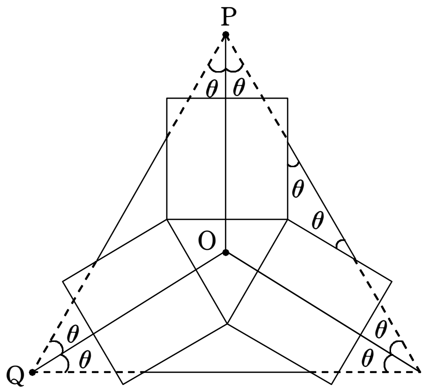


図 b

（エ），（オ） T_0 を T_1 で表すと（ア）で求めたように

$$T_0=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$$

同様に，T_1 を T_2 で，T_2 を T_3 で，……，T_{n-1} を T_n で表すと

$$T_1=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_2$$

$$T_2=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$T_{n-1}=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_n$$

以上を辺々かけあわせると

$$T_0=\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}\right)^n T_n \qquad \text{ただし，}\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$$

（カ） $n=\infty$ とは，正 n 角柱が円柱になることである。円柱にロープを巻き，その一端を小さな力 (T_∞) で支えるだけで，他端にはたらく大きな力 (T_0) でつりあわせることができる。

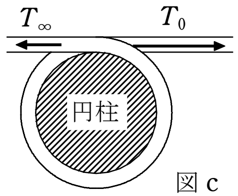


図 c

例えば，馬を止めておくのに手綱を柱に縛りつけるのではなく，柱に手綱を数回巻きつけ，他端におもりをつけて垂れ下げておくだけで馬を止めておくことができる。

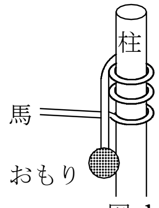


図 d

参考　問題文 ③ 式の導き方

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{n}$$

② 式より

$$T_0=\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}\right)^n T_n$$

$$=\left(\frac{\cos\dfrac{\pi}{n}+\mu\sin\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}-\mu\sin\dfrac{\pi}{n}}\right)^n T_n$$

ここで $\dfrac{\pi}{n}$ は極めて小さいから次の近似を用いる。

$$\cos\frac{\pi}{n}\fallingdotseq 1,\ \sin\frac{\pi}{n}\fallingdotseq\frac{\pi}{n}$$

$$T_0=\left(\frac{1+\dfrac{\mu\pi}{n}}{1-\dfrac{\mu\pi}{n}}\right)^n T_n=\left(\frac{n+\mu\pi}{n-\mu\pi}\right)^n T_n$$

ここで $n-\mu\pi=N$ と置き替えて

$$T_0=\left(\frac{N+2\mu\pi}{N}\right)^{N+\mu\pi}\cdot T_n=\left(1+\frac{2\mu\pi}{N}\right)^{N+\mu\pi}\cdot T_n$$

ここで $n\longrightarrow\infty$ すなわち $N\longrightarrow\infty$ にすれば

$$\left(1+\frac{2\mu\pi}{N}\right)^{N+\mu\pi}\longrightarrow e^{2\mu\pi}$$

となる。

ゆえに　$T_0 = e^{2\pi\mu} \cdot T_\infty$