1．

図 1 のように，水平面と角度 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなすあらい斜面がある。質量 m の物体 A には，質量の無視できる伸び縮みしない糸が結ばれている。糸の他端には質量 M の物体 B が，斜面上部のなめらかにまわる滑車を通して，とりつけられている。

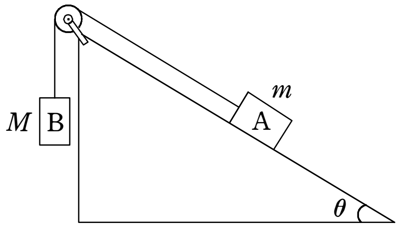

図 1

物体 A と斜面との間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

まず，図 2 のように，糸が斜面の最大傾斜方向と平行な場合を考える。

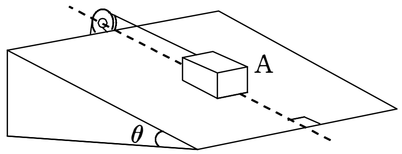

図 2

(1)　物体 A が斜面上で静止しているとしよう。このとき，物体 A にはたらく摩擦力の大きさを，m，M，θ，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(2)　物体 A を斜面上で静止させておくためには，物体 B の質量 M の値がある範囲内になければならない。この M の範囲の下限値と上限値を，m，θ，μ，g のうちの必要なものを用いて表せ。なお，(a) $\mu<\tan\theta$，(b) $\mu\geqq\tan\theta$，それぞれの場合について答えよ。

次に，図 3 のように，糸が斜面の最大傾斜方向と角度 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなしている場合を考える。

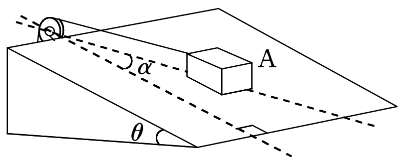

図 3

(3)　物体 A が斜面上で静止しているとしよう。このとき，物体 A にはたらく摩擦力の大きさを，m，M，θ，α，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(4)　μ がある値 μ_c よりも小さい場合は $(\mu<\mu_c)$，物体 B の質量 M の値をどのように選んでも，物体 A を静止させておくことができない。この μ_c を，m，θ，α，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(5)　$\mu\geqq\mu_c$ の場合に，物体 A を斜面上で静止させておくためには，物体 B の質量 M の値がある範囲内になければならない。この M の範囲の下限値と上限値を，m，θ，α，μ，g のうちの必要なものを用いて表せ。なお，(a) $\mu<\tan\theta$，(b) $\mu\geqq\tan\theta$，それぞれの場合について答えよ。

解答　(1)　$|(M-m\sin\theta)|g$

(2)　(a)　下限値：$m(\sin\theta-\mu\cos\theta)$，　上限値：$m(\sin\theta+\mu\cos\theta)$

(b)　下限値：0，　上限値：$m(\sin\theta+\mu\cos\theta)$

(3)　$g\sqrt{M^2+m^2\sin^2\theta-2Mm\sin\theta\cos\alpha}$

(4)　$\tan\theta\sin\alpha$

(5)　(a)　下限値：$m\left(\sin\theta\cos\alpha-\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)$

上限値：$m\left(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)$

(b)　下限値：0，　上限値：$m\left(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{\mu^2\cos^2\theta-\sin^2\theta\sin^2\alpha}\right)$

2．

次の文章の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ には適切な数式を記入し，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ には適切な文章や図を記入せよ。

図1に示すように，固定された平板上に1辺の長さが L の立方体Aをおき，両側面に糸を付け，それぞれ張力 T_0 および T_1 で糸を引いた。立方体Aと平板との静止摩擦係数は μ，立方体の両側面と糸とのなす角度はそれぞれ $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。立方体Aは平板に対して平行にしか動かない(回転しない)とする。

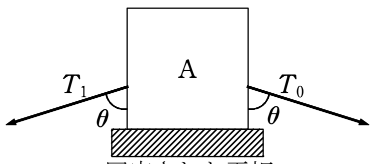

図1

$T_0=T_1$ の状態から，T_0 のみを少しずつ増加させたとき，立方体Aがすべり始める直前の T_0 を T_1 を用いて表すと，

$$T_0=\boxed{\text{ア}}\ \cdots\cdots ①$$

となる。① 式の導き方を $\boxed{\text{イ}}$ に記述せよ。

次に，n 個の立方体Aを固定された正 n 角柱の各側面におき，互いに糸で結んだ。正 n 角柱の1辺の長さは L であり，立方体Aと正 n 角柱との静止摩擦係数は μ である。糸の張力を順に T_0，T_1，……，T_n とする。図1の場合と同じように，n 個の立方体Aと $n+1$ 本の糸とのなす角 θ は全て等しいとする。図2は $n=3$ の場合の例である。θ を n で表すと，$\theta=\boxed{\text{ウ}}$ である。$T_0=T_n$ の状態から少しずつ T_0 のみを増加させたとき，n 個の立方体Aがすべり始める直前の T_0 を T_n を用いて表すと

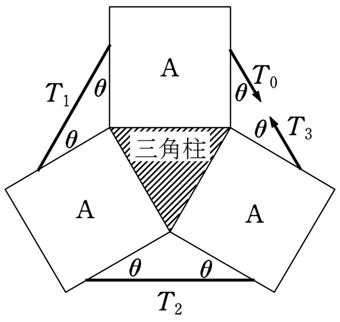

図2

$$T_0=\boxed{\text{エ}}\ \cdots\cdots ②$$

となる。② 式の導き方を $\boxed{\text{オ}}$ に記述せよ。

$n=\infty$ のときの ② 式を考慮すると

$$T_0\leqq T_\infty e^{2\pi\mu}\ \cdots\cdots ③$$

となる場合にはすべりが起こらないことが導かれる。ここで，$e=2.718\cdots\cdots$ である。③ 式が表すような現象の具体例を $\boxed{\text{カ}}$ に説明せよ。

解答 (ア) $\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$

(イ) 立方体Aにはたらく力は，T_0，T_1 の他に，平板からの垂直抗力 N と摩擦力 f である。

平板に垂直方向の力のつりあいより，

$$N-T_0\cos\theta-T_1\cos\theta=0$$

よって　$N=(T_0+T_1)\cos\theta\ \cdots\cdots$ (a)

また，平板に平行な方向の力のつりあいより

$$T_0\sin\theta-T_1\sin\theta-f=0\ \cdots\cdots \text{(b)}$$

Aがすべり始める直前の摩擦力は最大摩擦力 f_0 であるから

$$f\Longrightarrow f_0=\mu N\cdots\cdots \text{(c)}$$

(c) に (a)，(b) を代入して

$$(T_0-T_1)\sin\theta=\mu(T_0+T_1)\cos\theta$$

よって　$T_0=\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$

(ウ) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$

(エ) $T_0=\left(\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}\right)^n T_n$　ただし，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$

(オ) T_0 を T_1 で表すと (ア) で求めたように

$$T_0=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_1$$

同様に，T_1 を T_2 で，T_2 を T_3 で，……，T_{n-1} を T_n で表すと

$$T_1=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_2$$

$$T_2=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_3$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$T_{n-1}=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}T_n$$

以上を辺々かけあわせると

$T_0=\left(\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}\right)^n T_n$　ただし，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}$

(カ) 馬を止めておくのに手綱を柱に縛りつけるのではなく，柱に手綱を数回巻きつけ，他端におもりをつけて垂れ下げておくだけで馬を止めておくことができる。