1．

次の各問いに対する最も適当な答えを,それぞれの解答群から 1 つ選べ。なお，答えが数値の場合には，最も近い値を解答群から選べ。ただし，ばねの質量は無視でき，物体 A は一様な密度をもつ円柱形の物体であるとする。なお，水の密度は 1.0 g/cm^3 とし，重力加速度の大きさは 9.8 m/s^2 とする。

(1)　図 1 のように，自然の長さ 5 cm のばね S に質量 3 kg の物体 A をつり下げたところ，ばね S の全長は 8 cm となった。ばね S のばね定数は何 N/m か。

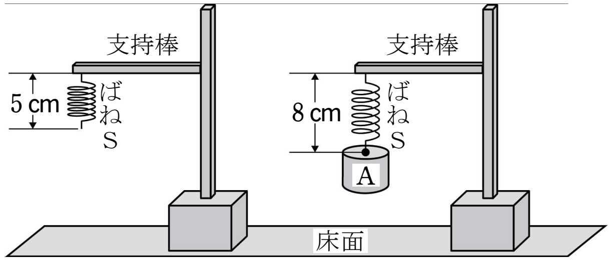


図 1

解答群

①　9.8　　②　36.8　　③　368　　④　588　　⑤　980

(2)　図 2 のように，物体 A を水の入った容器に入れ，物体 A がすべて水に浸るように沈めたところ，ばね S の全長は 6 cm となった。物体 A にはたらく浮力は何 N か。ただし，物体 A は容器の底には接触していないものとする。

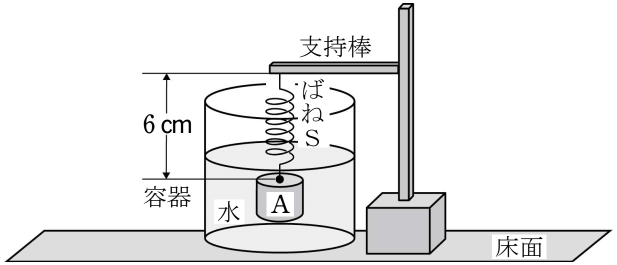


図 2

解答群

①　0.196　　②　1.96　　③　19.6　　④　196　　⑤　39.2　　⑥　392

(3)　物体 A の体積は何 m^3 か。

解答群

①　5×10^{-4}　　②　2×10^{-3}　　③　5×10^{-3}　　④　2×10^{-2}　　⑤　5×10^{-2}

⑥　2×10^{-1}

(4)　次に，図 3 のように，片端が天井に固定されたばね定数 980 N/m のばね U を用いて，水の入った容器を 3 本の伸び縮みしない丈夫な軽い糸でつるし，支持棒の高さを調節して，物体 A をすべて水に浸した。このとき，ばね U の伸びは何 cm か。ただし水と容器の全質量は 6 kg であり，物体 A は容器の底には接触していないものとする。

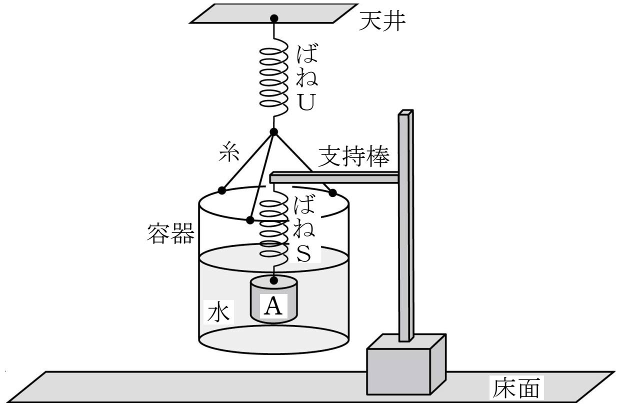


図 3

解答群

①　0.5　　②　2.5　　③　4　　④　8　　⑤　10

(5)　次に，支持棒をゆっくりと持ち上げ，ばね S の全長が 7 cm となるように高さを調節した。このとき，物体 A の水面から出ている部分の体積は何 cm^3 か。

解答群

①　1×10^{2}　　②　2.5×10^{2}　　③　1×10^{3}　　④　2.5×10^{3}　　⑤　1×10^{4}

⑥　2.5×10^{4}

(6)　(5) のとき，ばね U の伸びは何 cm か。

解答群

①　2.2　　②　4.5　　③　5.7　　④　7.0　　⑤　10.2　　⑥　12.4

(7)　次に，容器中の水に食塩 500 g を完全に溶かした後，物体A が (5) と同じ体積だけ水面から出るように支持棒の高さを調節した。ばね S の伸びは何 cm か。ただし，このときの食塩水の密度は 1.1 g/cm^3 であるものとする。

解答群

①　1.1　　②　1.3　　③　1.6　　④　1.9　　⑤　2.2

(8)　(7) において，ばね U の伸びは何 cm か。

解答群

①　6.0　　②　6.5　　③　7.0　　④　7.6　　⑤　8.7

解答　(1)　⑤　　(2)　③　　(3)　②　　(4)　④　　(5)　③　　(6)　④　　(7)　④
(8)　④

解説

(1) 物体Aには図aのような力がはたらいている。ばねSの伸びは

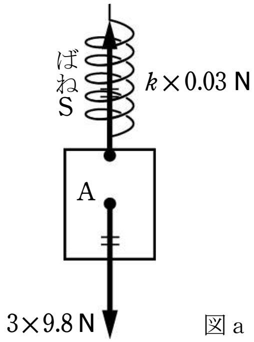
$8-5=3\ \mathrm{cm}$

$=0.03\ \mathrm{m}$

なので，ばね定数を k〔N/m〕としてフックの法則「$F=kx$」を用いて力のつりあいの式を立てると

$k\times0.03-3\times9.8=0$

よって　$k=980\ \mathrm{N/m}$　…… ⑤



図a

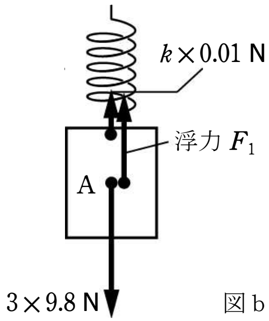
(2) 物体Aには図bのように，新たに浮力が上向きに加わる。浮力の大きさを F_1〔N〕とし，ばねSの伸びが 0.01 m であることを用いて力のつりあいの式を立てると

$k\times0.01+F_1-3\times9.8=0$

k に (1) の答えを代入して

$F_1=3\times9.8-980\times0.01$

$=19.6\ \mathrm{N}$　…… ③



図b

別解　(1) より，このばねは 3 kg をつるすと 3 cm 伸びる。(2) では伸びが 1 cm であることからばねの力の大きさは 1 kg の重さに相当する。減った 2 kg 分の重さが浮力の大きさになるので

$F_1=2\times9.8$

$=19.6\ \mathrm{N}$　…… ③

(3) 水の密度を ρ〔kg/m³〕とすると

$$\rho=\frac{1\ \mathrm{g}}{1\ \mathrm{cm^3}}=\frac{1\times10^6\ \mathrm{g}}{1\times10^6\ \mathrm{cm^3}}$$

$$=\frac{1\times10^3\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{m^3}}=1\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$$

なので，物体Aの体積を V〔m³〕とし，これらと (2) の F_1 を浮力の式「$F=\rho Vg$」に代入して

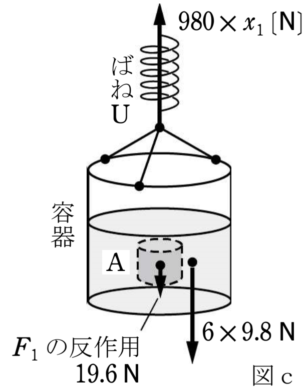
$19.6=1\times10^3\times V\times9.8$

よって　$V=2\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$　…… ②

(4) 水と容器，3本の糸をあわせた物体系には，図cのようにばねUからの力，水と容器の重力のほかに，物体Aから浮力の反作用が下向きに 19.6 N はたらく。ばねUの伸びを x_1〔m〕として物体系について力のつりあいの式を立てると

$980\times x_1-6\times9.8-19.6=0$

よって　$x_1=0.08\ \mathrm{m}=8\ \mathrm{cm}$　…… ④



図c

別解　ばねUのばね定数はばねSと同じなので，(2) と同様に 1 kg 相当の力で 1 cm 伸びる。水と容器をあわせて 6 kg であり，(2) より浮力が 2 kg 相当の力なので，ばねUにはあわせて 8 kg 相当の力がかかるから，伸びは 8 cm となる。　…… ④

(5) 求める体積を V'〔m³〕とおくと，このとき物体Aが受ける浮力の大きさ F_2〔N〕は

$F_2=\rho(V-V')g$

$=(1\times10^3)\times(2\times10^{-3}-V')\times9.8$

となる。ばねSの伸びが 0.02 m であることを用いて，(2) と同様に物体Aについて力のつりあいの式を立てると

$980\times0.02+F_2-3\times9.8=0$

$F_2=1\times9.8\ \mathrm{N}$

よって　$(1\times10^3)\times(2\times10^{-3}-V')\times9.8=1\times9.8$

$V'=1\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$

$=1\times10^3\ \mathrm{cm^3}$　…… ③

別解　伸びが 2 cm なので，ばねには 2 kg 相当の力がかかっている。Aが 3 kg であるから浮力の大きさは 1 kg の重さに相当し，(2) の半分である。よって水中部分にある体積は (3) の半分なので，水面から出ている体積も (3) の半分の $1\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ である。

$1\times10^{-3}\ \mathrm{m^3}=1\times10^3\ \mathrm{cm^3}$　…… ③

(6) 浮力の大きさが 1×9.8 N であることを考えて，(4) と同様に物体系について力のつりあいの式を立てる。ばねUの伸びを x_2〔m〕とすると

$980\times x_2-6\times9.8-1\times9.8=0$

よって

$x_2=0.07\ \mathrm{m}=7\ \mathrm{cm}$　…… ④

別解　ばねUには水と容器あわせて 6 kg のほかに 1 kg 相当の浮力の反作用がかかる

ので，合計 7 kg 相当の力がはたらき，7 cm 伸びる。　…… ④

(7)　(5) より水中にある A の体積が 1×10^{-3} m^3 であることに注意して物体 A が受ける浮力の大きさ F_3〔N〕を求めると，「$F=\rho Vg$」より

$$F_3=(1.1\times10^3)\times(1\times10^{-3})\times9.8$$
$$=1.1\times9.8\ \mathrm{N}$$

ばね S の伸びを x_3〔m〕として，(2) と同様に物体 A について力のつりあいの式を立てると

$$980\times x_3+F_3-3\times9.8=0$$

よって　$980x_3=3\times9.8-1.1\times9.8$

$$=1.9\times9.8$$
$$x_3=0.019\ \mathrm{m}$$
$$=1.9\ \mathrm{cm}\quad\cdots\cdots ④$$

別解　水の密度が 1.1 倍になるので，浮力の大きさも (5) の1.1 倍 (1.1 kg の重さに相当) だから　　$3-1.1=1.9$ kg

の重さに相当する力がばね S にかかる。よって伸びは 1.9 cm。…… ④

(8)　水には浮力 F_3 の反作用 1.1×9.8 N が下向きにはたらく。水には食塩 500 g が追加されたので，水と容器をあわせた質量が 6.5 kg になることに注意して，(4) と同様に物体系について力のつりあいの式を立てる。ばね U の伸びを x_4〔m〕とすると

$$980\times x_4-6.5\times9.8-1.1\times9.8=0$$

よって　$980x_4=7.6\times9.8$

$$x_4=0.076\ \mathrm{m}$$
$$=7.6\ \mathrm{cm}\quad\cdots\cdots ④$$

別解　ばね U には水＋容器＋食塩をあわせた 6.5 kg 相当の重力と F_3 の反作用 (1.1 kg 相当の力) がかかるので，あわせて 7.6 kg 相当の力がはたらき，7.6 cm 伸びる。

…… ④

2．

図 1 のように，糸をつけた円盤が水槽内に置かれ，ばね定数 k のばねで水槽の底につながれている。円盤はつねに水中にあり，その動きは鉛直方向に限られ，速さ v に比例した摩擦力 Av を水から受ける。ただし，A は定数である。なお，糸とばねの質量は無視できるとする。また，重力加速度の大きさを g とする。

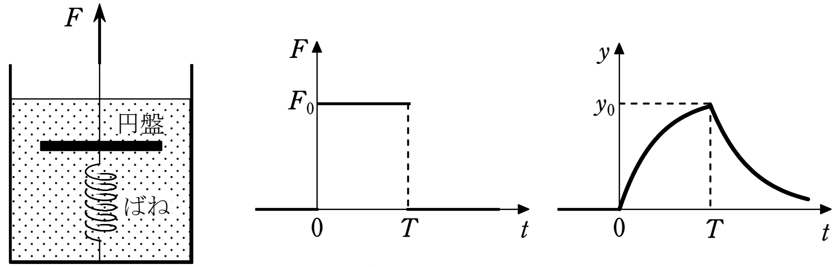


図 1　　図 2　　図 3

(1)　まず，糸を鉛直上向きに力 F で引く。このとき，ばねの伸びを y，円盤の質量と加速度をそれぞれ m，a として，円盤の運動方程式を求めよ。

円盤が十分に軽い場合には，その質量 m を 0 としてよい。以下ではそのような場合を考える。図 2 に示すように，時刻 $t=0$ から $t=T$ の間，一定の力 F_0 を加えたところ，ばねの伸び y の時間変化は図 3 のようになった。時刻 $t=T$ のとき，ばねの伸びは y_0 であった。

(2)　時刻 $t=0$ の直後には，ばねの伸びは 0 とみなしてよい。このときの円盤の速さを求めよ。

(3)　時刻 $t=T$ の直前と直後の円盤の速さを求めよ。

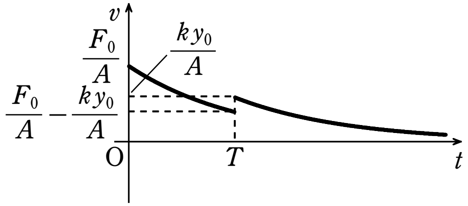
(4)　T をこえて十分に時間が経過した後の円盤の速さを求めよ。

(5)　円盤の速さ v の時間変化を表す概略図を描け。

(6)　時刻 $t=0$ から時刻 $t=T$ までに糸を引く力がする仕事のうち，一部はばねにたくわえられ，残りは摩擦力 Av に抗してなされる仕事 W と考えられる。W を，F_0，y_0，k を用いて表せ。

解答　(1)　$ma=F-ky-mg-Av$　　(2)　$\dfrac{F_0}{A}$　　(3)　直前：$\dfrac{F_0-ky_0}{A}$，直後：$\dfrac{ky_0}{A}$

(4)　0　　(5)　下図　　(6)　$F_0y_0-\frac{1}{2}ky_0$



（解説）

水により速さに比例した摩擦力 (抵抗力) Av を受ける物体の運動は，物体にはたらく力から運動方程式を立てて考えていく。(2) 以降では物体 (円盤) が十分に軽い場合で，その質量 m を 0 としてよいものとするので，運動方程式において　$ma\fallingdotseq 0$　すなわち常に力のつりあいの状態に近似して解くことになる。

(1)　力 F で上に引き，ばねが y 伸びているとき，円盤にはたらく力を図示すると図 a になる。この円盤の運動方程式は

$$\boldsymbol{ma=F-ky-mg-Av}$$

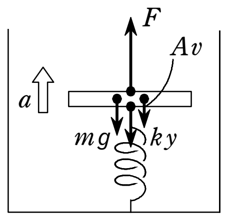


図 a

(2)　$t=0$ の直後には，ばねの伸びは 0 である。このときの円盤の速さを v_1 とすると，$m\fallingdotseq 0$ としてよいから (1) の運動方程式は $F=F_0$ より

$$0=F_0-Av_1$$

ゆえに　$v_1=\boldsymbol{\frac{F_0}{A}}$

(3)　$t=T$ の直前，直後ともばねの伸びは y_0 であるが，円盤にはたらく力は，直前が F_0，直後は 0 である。直前，直後の円盤の速さを v_2，v_3 として，それぞれのときの運動方程式を立てると

直前：$ma=F_0-ky_0-mg-Av_2$

直後：$ma=-ky_0-mg+Av_3$

$m\fallingdotseq 0$ を用いて式を整理すると

$t=T$ の直前：$v_2=\boldsymbol{\frac{F_0-ky_0}{A}}$

$t=T$ の直後：$v_3=\boldsymbol{\frac{ky_0}{A}}$

(4)　T をこえて十分に時間がたつとばねの伸びは $y=0$ になる。そのときの円盤の速さを v_4 として運動方程式を立てると

$$ma=-mg-Av_4$$

$m\fallingdotseq 0$ を用いて式を整理すると　$v_4=\boldsymbol{0}$

(5)　(2) ～ (4) の運動方程式と結果をもとに v-t 図を描くと，図 b のようになる。

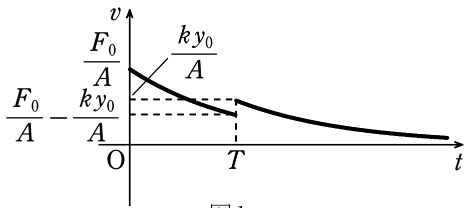


図 b

(6)　$m\fallingdotseq 0$ より，重力による位置エネルギーと運動エネルギーは無視できる。$t=0$ から $t=T$ までに糸を引く力がする仕事 F_0y_0 は，ばねにたくわえられた弾性エネルギー $\frac{1}{2}ky^2$ と摩擦力に抗してする仕事 W になるから

$$F_0y_0=\frac{1}{2}ky_0{}^2+W$$

ゆえに　$W=\boldsymbol{F_0y_0-\frac{1}{2}ky_0{}^2}$