

1.

次の文章を読み、文中にある問いに答えよ。

無風状態の空气中で水滴を落とした場合、速度が増加するとともに空気抵抗が大きくなり、いずれ等速(終端速度 v_f)に達する。表は半径 r の異なる水滴の v_f の例である。

	雨粒	霧雨粒	雲粒
r	1 mm	0.1 mm	0.01 mm
v_f	650 cm/s	100 cm/s	1.0 cm/s

○水滴

(1) 落下中の水滴にはたらくすべての力と名称を図中に記入せよ。また、水滴の運動方程式を記せ。ただし、用いた記号には説明をつけよ。

水滴の速度が0のとき、空気抵抗も0であり、速度が増すとともに空気抵抗が大きくなる。また、水滴の半径が小さくなるほど終端速度は小さくなる。このような性質をもつ空気抵抗の力 F は水滴の速度 v と水滴の半径 r のどのような関数か推定してみよう。

(2) $F = Af_1(v)f_2(r)$ のように、定数 A と2つの関数の積で表せると仮定し、さらに、 $f_1(v) = v^a$ 、 $f_2(r) = r^b$ とした場合、指数 a 、 b はどんな範囲にあればよいかを示せ。ただし、密度 ρ で半径 r の水滴の質量は $m = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$ と表せる。

上の表に示した雨粒よりさらに大きな粒(固体とする)の場合を考えてみよう。たとえば、半径1cm程度の氷や金属球を初速度0で自由落下させた運動を観測する場合、観測落下距離が10m前後であれば、どれも落下運動に違いは見られない。これは運動において空気抵抗が無視できるためと考えられる。

(3) この運動において空気抵抗が無視できるようになる理由を説明せよ。また、真空中ではどんな物体も加速度が重力加速度と一致する運動をするが、物体にはたらく力と運動法則を調べて、その理由を述べよ。

解答 (1) 右図。

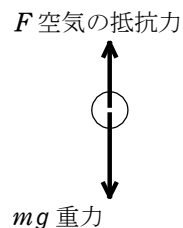
$$ma = mg - F$$

m : 水滴の質量

a : 水滴の加速度

g : 重力加速度の大きさ

F : 空気の抵抗力



(2) $0 < a, 0 < b < 3$

(3) 質量が大きくと終端速度も大きくなる。落下距離が短く速度が小さいうちは、抵抗力は重力にくらべて無視できるほどに小さいから。

真空中では重力のみがはたらくから、加速度を a とすると、運動方程式は

$$ma = mg \quad \text{ゆえに} \quad a = g$$

ゆえに、質量に関係なく重力加速度の大きさに一致する。

解説

(1) 右図。

$$ma = mg - F$$

m : 水滴の質量, a : 水滴の加速度,

g : 重力加速度の大きさ, F : 空気の抵抗力

(2) 空気の抵抗力 $F = Av^a r^b$ は v の大きなほどまた r の大きなほど大きいから

$$a > 0, \quad b > 0$$

終速度に達したときは

$$F = mg \quad \text{ゆえに} \quad Av_f^a r^b = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho g$$

$$\text{ゆえに} \quad v_f = \sqrt[a]{\frac{4\pi\rho g}{3A} r^{\frac{3-b}{a}}}$$

水滴の半径 r が大きくなるほど、終端速度 v_f も大きくなるので、上式において

$$\frac{3-b}{a} > 0$$

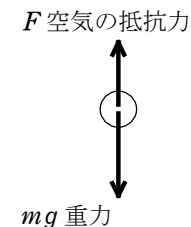
$a > 0$ なので、 $3-b > 0$ すなわち、 $b < 3$ 以上より $0 < a, 0 < b < 3$

(3) 半径が大きく質量の大きな球体では、終速度も大きくなる。したがって、落下距離が短く速度が小さいうちは、抵抗力も小さく、重力にくらべて無視できるから。

真空中では重力のみがはたらくから、加速度を a とすると運動方程式は

$$ma = mg \quad \text{ゆえに} \quad a = g$$

ゆえに物体の質量に関係なく、加速度は重力加速度の大きさ g に一致する。



2.

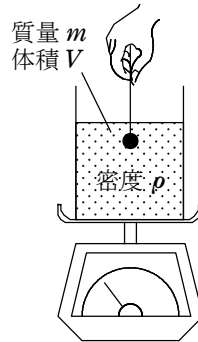
質量 m 、体積 V の物体を質量と体積の無視できる細い糸につるし、密度 ρ の粘性の高い液体中に浸した後、静かに手をはなした。この物体は液中を落下した。落下中の物体は液体との摩擦などにより速度に比例した抵抗力を受け、その比例定数は k である。重力加速度の大きさを g として下記の設問に答えよ。

(1) 物体がこの液中を落下するには液体の密度 ρ はある値より小さくなくてはならない。その値を V 、 m で表せ。

(2) 落下中の物体の速度を v として、加速度 a を求めよ。

(3) 物体の落下速度はやがてほぼ一定値になった。その速度 v_f を求めよ。

(4) この液体を十分に大きく、深いビーカーに満たし、はかりの上にのせた。図に示すように、糸につるした状態で物体をビーカーの液体中に完全に浸し、静かに手をはなした。物体を浸す前の、液体とビーカーの重さに対するはかりの指示値を基準として、下記の (a)、(b)、(c) および (d) の状態におけるはかりの指示値の変化量を求めよ。



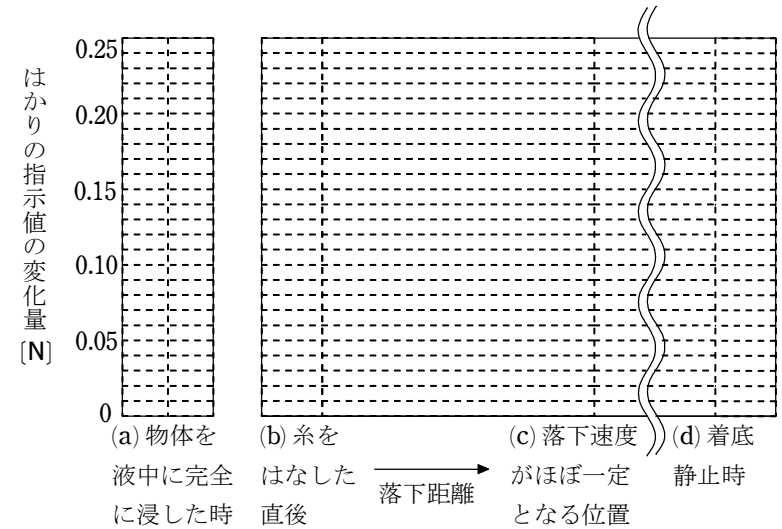
(a) 物体を糸につるし、液中に完全に浸したとき

(b) 糸をはなした直後

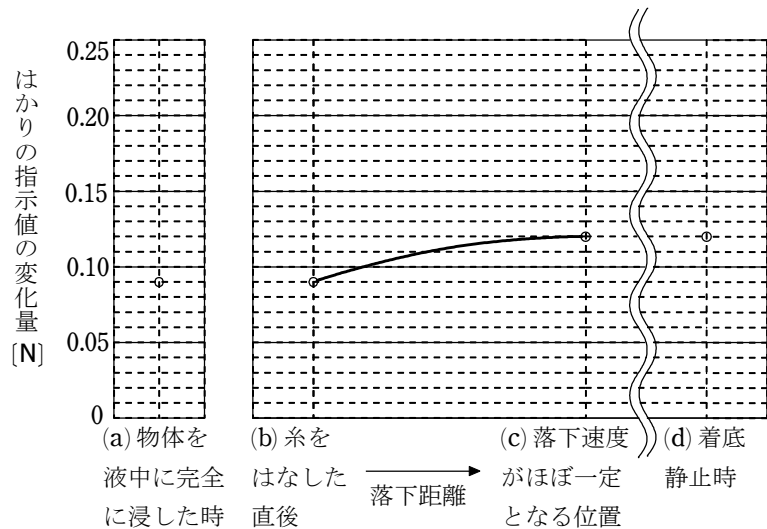
(c) 物体の落下速度が一定速度 v_f となったとき

(d) 物体がビーカーの底に着き、はかりの目盛りが静止した後

(5) $\rho = 1.5 \text{ (g/cm}^3\text{)}$ 、 $V = 6.0 \text{ (cm}^3\text{)}$ 、 $m = 12 \text{ (g)}$ 、 $k = 0.20 \text{ (N}\cdot\text{s/m)}$ 、 $g = 10 \text{ (m/s}^2\text{)}$ とするとき、(4) の (a)、(b)、(c) および (d) における状態の指示値の変化量はそれぞれ何 **N** か。有効数字 2 桁で答えよ。また、それらの値をグラフに○印でかき込め。さらに、(b) から (c) の状態に至る指示値変化のようすの概略をグラフ中に実線で示せ。



- 解答** (1) $\frac{m}{V}$ (2) $\frac{mg - \rho Vg - kv}{m}$ (3) $\frac{(m - \rho V)g}{k}$
 (4)(a) ρVg 増加 (b) ρVg 増加 (c) mg 増加 (d) mg 増加
 (5) 下図 (a) $+9.0 \times 10^{-2} \text{ N}$ (b) $+9.0 \times 10^{-2} \text{ N}$ (c) $+1.2 \times 10^{-1} \text{ N}$
 (d) $+1.2 \times 10^{-1} \text{ N}$



解説

液体中を運動する物体にはたらく力は、重力 mg 、抵抗力 kv と浮力 ρVg である。

(1) 重力が浮力よりも大きくなければ物体は落下できないから

$$mg > \rho Vg \quad \text{ゆえに} \quad \rho < \frac{m}{V}$$

(2) 落下中の物体にはたらく力を示すと図1のようになる。

鉛直下向きを正方向として運動方程式をたてると

$$ma = mg - \rho Vg - kv$$

$$\text{よって} \quad a = \frac{mg - \rho Vg - kv}{m}$$

(3) 落下速度が一定値になるとき、加速度は0であるから、(2)の

$a=0$ として

$$mg - \rho Vg - kv_f = 0$$

$$\text{よって} \quad v_f = \frac{(m - \rho V)g}{k}$$

(4) 液体が物体から受ける力は、浮力の反作用の ρVg と、抵抗力の反作用 kv でともに鉛直下向きにはたらく。

(a) 物体は液体から浮力 ρVg を受けるから、その反作用力 ρVg を液体におよぼし、はかりの指示値は ρVg 増加する。

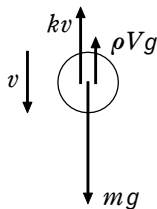


図1

(b) 糸をはなした直後には、抵抗力は0で浮力だけが物体にはたらく。液体には浮力 ρVg の反作用だけが加わるから、はかりの指示値は(a)と同様に ρVg 増加している。

(c) 物体には液体から浮力 ρVg と抵抗力 kv_f を受け、その合力の大きさは mg と等しい。よって液体にはその反作用がはたらくから、秤の指示値は mg 増加している。

(d) 物体にはたらく重力 mg だけ指示値は増加している。

(5) 図2 与えられた数値で単位に注意して計算をすると

$$(a) \quad +\rho Vg = 1.5 \times 6.0 \times 10^{-3} \times 10 = +9.0 \times 10^{-2} \text{ (N)}$$

$$(b) \quad +\rho Vg = +9.0 \times 10^{-2} \text{ (N)}$$

$$(c) \quad +mg = 12 \times 10^{-3} \times 10 = +1.2 \times 10^{-1} \text{ (N)}$$

$$(d) \quad +mg = +1.2 \times 10^{-1} \text{ (N)}$$

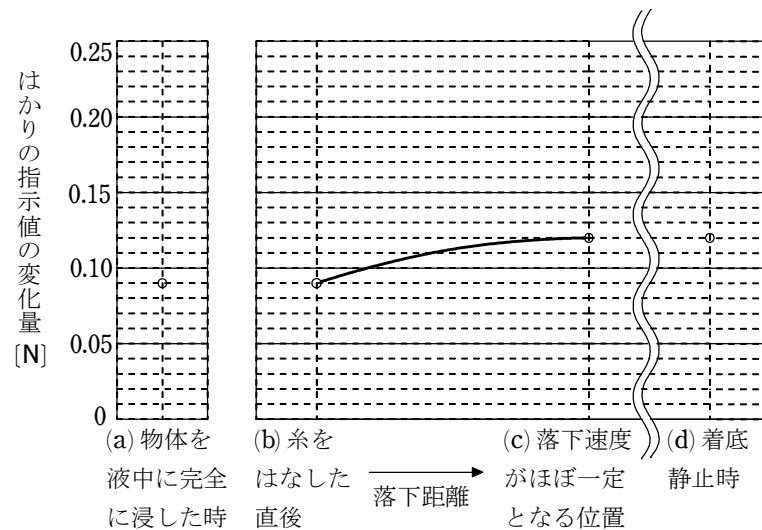


図2