1．

ある駅を初速度 0 で出発した電車が，2 つの信号機 A と B とをそれぞれ速度 v_{A} と v_{B} で通過した。

ただし，軌道は直線であり，電車は駅と信号機 A との間では時間に対し一定の割合で速度を増し，信号機 A と B の間では同じ割合で速度を減らした。

(1)　駅と信号機 A との間の距離を x_{A} とし，電車の加速度の大きさを v_{A} と x_{A} で表せ。

(2)　電車が駅を出発してから信号機 A を通過するまでの時間を v_{A} と x_{A} で表せ。

(3)　駅と信号機 B との距離を x_{B} とし，x_{B} の x_{A} に対する比を v_{A} と v_{B} で表せ。

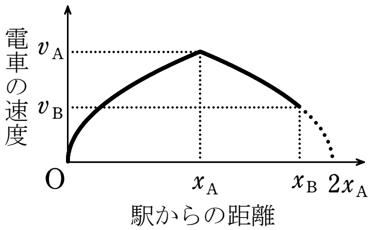
(4)　電車の速度は駅からの距離に対してどのように変化するか。おおよその変化を図に描け。

解答　(1)　$\dfrac{v_{\mathrm{A}}^2}{2x_{\mathrm{A}}}$

(2)　$\dfrac{2x_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}}$

(3)　$\dfrac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}=2-\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2}{v_{\mathrm{A}}^2}$

(4)　右図



解説

(1)　電車の加速度の大きさを a とおくと

$v_{\mathrm{A}}=at$ …… ①，　　$x_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{2}at^2$ …… ②

①，② 式より t を消去して　$a=\dfrac{v_{\mathrm{A}}^2}{2x_{\mathrm{A}}}$

別解　$v_{\mathrm{A}}^2-0^2=2ax_{\mathrm{A}}$　　ゆえに　$a=\dfrac{v_{\mathrm{A}}^2}{2x_{\mathrm{A}}}$

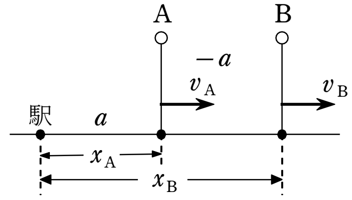
(2)　① 式に上の a を代入して

$$t=\frac{v_{\mathrm{A}}}{a}=v_{\mathrm{A}}\cdot\frac{2x_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}^2}=\frac{2x_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}}$$

別解　駅から A までの平均の速さは $\dfrac{0+v_{\mathrm{A}}}{2}=\dfrac{1}{2}v_{\mathrm{A}}$ だから

$$t=\frac{x_{\mathrm{A}}}{\frac{1}{2}v_{\mathrm{A}}}=\frac{2x_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{A}}}$$

(3)　信号機 A と B の間の加速度は $-a$ であるから



$$v_{\mathrm{B}}^2-v_{\mathrm{A}}^2=2\times(-a)\times(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})$$

$$=-\frac{v_{\mathrm{A}}^2}{x_{\mathrm{A}}}(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})=v_{\mathrm{A}}^2\left(1-\frac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}\right)$$

ゆえに　$\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2}{v_{\mathrm{A}}^2}-1=1-\dfrac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}$

よって　$\dfrac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}=2-\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2}{v_{\mathrm{A}}^2}$

別解　$v_{\mathrm{B}}^2-v_{\mathrm{A}}^2=2\times(-a)\times(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})$

$v_{\mathrm{A}}^2=2\times a\times x_{\mathrm{A}}$

辺々割ると　$\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2}{v_{\mathrm{A}}^2}-1=-\left(\dfrac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}-1\right)$

ゆえに　$\dfrac{x_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{A}}}=2-\dfrac{v_{\mathrm{B}}^2}{v_{\mathrm{A}}^2}$

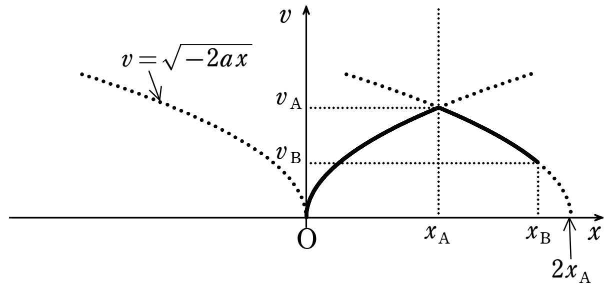
(4)　$0\leqq x\leqq x_{\mathrm{A}}$ のとき　$v^2=2ax$　　ゆえに　$v=\sqrt{2ax}$

$x_{\mathrm{A}}\leqq x\leqq x_{\mathrm{B}}$ のとき　$v^2-v_{\mathrm{A}}^2=2\times(-a)\times(x-x_{\mathrm{A}})$

ゆえに　$v^2=v_{\mathrm{A}}^2-2a(x-x_{\mathrm{A}})=2ax_{\mathrm{A}}-2ax+2ax_{\mathrm{A}}$

$=-2a(x-2x_{\mathrm{A}})$

したがって，$v^2=-2ax$ のグラフを $2x_{\mathrm{A}}$ だけ平行移動したグラフとなる (下図参照)。$x=x_{\mathrm{A}}$ のとき $v=v_{\mathrm{A}}$，$x=x_{\mathrm{B}}$ のとき $v=v_{\mathrm{B}}$ であるから，これらの点をつなげばよい。$x=x_{\mathrm{A}}$ で対称となる。下図の実線部分が答えとなる。



２．

高層ビルを上下に運行しているエレベーターがある。このビルの各階の床面はすべて4 m 間隔である。エレベーターは各階すべてに停止することができ，エレベーターが各階に停止するときは双方の床面が同じ高さになる。

このエレベーターは運行をコンピュータで制御しており，次のように運動する。コンピュータは停止しているエレベーターが動き出す前に，エレベーター内の行き先階スイッチおよび各階のエレベーター呼び出しスイッチの状態をチェックし，最初に停止すべき階を決定する。そして，下記の (a)，(b)，(c) の手順で動作するとして，そこでの T，t，a の値を決定し，それに従ってエレベーターを運行させる。

(a)　時間 T だけ，一定の大きさ a の加速度で加速運動

(b)　時間 t だけ，等速度運動

(c)　時間 T だけ，一定の大きさ a の加速度で減速運動

エレベーターが動き始めてから，最初に停止する予定の階よりも手前の階で停止する要求が発生したときは(エレベーター外の途中階の人がスイッチを押したり，内部の人がエレベーターが動き出した後，途中階のスイッチを押したとき)，コンピュータはその要求の発生した時点から大きさ b の一定の加速度で減速すると仮定して，その途中階に停止するために必要な b の値をすばやく計算する。この b の値が a_{MAX} よりも大きい場合は，乗客に不快感を与えるので途中階で停止はせず，最初のスケジュール通りに運行するものとする。

(1)　1 階から 31 階まで直行するとき，$T=5$ s，$a=1$ m/s^2 で運行した。このとき，t の値を答えよ。

(2)　40 階から n 階まで $a=1$ m/s^2 で運行するとき，T と t の間に成り立つ関係式をなるべく簡単な形で答えよ $(0<n<40)$。

(3)　1 階から，$a=1$ m/s^2，$T=6$ s，$t=10$ s の予定で上に運行し始めたとき，動き始めてから 7 秒後に N 階で，ある人が上に行くための呼び出しスイッチを押した。$a_{\mathrm{MAX}}=4$ m/s^2 とすると，エレベーターが止まってくれるためには，N はいくつ以上でなくてはいけないか。

解答　(1)　19 s　　(2)　$T(T+t)=4(40-n)$　　(3)　9 階

解説

(1)　$4\times(31-1)=\left(\frac{1}{2}\times1\times5^2\right)\times2+1\times5\times t$　　ゆえに　$t=19$ (s)

(2)　$4\times(40-n)=\frac{1}{2}\times1\times T^2\times2+1\times T\times t$　　ゆえに　$T(T+t)=4(40-n)$

(3)　6 秒後の速度は　$1\times6=6$ (m/s)

7 秒までの上昇距離は　$\frac{1}{2}\times1\times6^2+6\times1=24$ (m)

N 階までの残りの距離は　$4\times(N-1)-24=4N-28$ [m]

N 階で止まるためには　$0-6^2=-2b(4N-28)$　　ゆえに　$b=\frac{9}{2N-14}$ [m/s^2]

$b\leqq4$ から　$\frac{9}{2N-14}\leqq4$　　ゆえに　$N\geqq9$ (階)